

# Экспериментальная проверка модели Леггетта с нелокальными параметрами

С. Брансиар и др. (Швейцария, Сингапур)

Сокращенный перевод М. Х. Шульмана ([shulman@dol.ru](mailto:shulman@dol.ru),  
[www.timeorigin21.narod.ru](http://www.timeorigin21.narod.ru))

---

arXiv:0708.0584v1 [quant-ph] 6 Aug 2007

## Experimental Falsification of Leggett's Non-Local Variable Model

Cyril Branciard<sup>1</sup>, Alexander Ling<sup>2,3</sup>, Nicolas Gisin<sup>1</sup>, Christian Kurtsiefer<sup>2</sup>,  
Antia Lamas-Linares<sup>2</sup>, Valerio Scarani<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Group of Applied Physics, University of Geneva, Switzerland

<sup>2</sup> Centre for Quantum Technologies, National University of Singapore, Singapore

<sup>3</sup> Temasek Laboratories, National University of Singapore, Singapore

(Dated: February 1, 2008)

---

Теорема Белла гарантирует, что не существует моделей с *локальными* параметрами, которые могли бы воспроизвести квантовые корреляции. Также и некоторые модели с *нелокальными* параметрами, с учетом “очевидных” ограничений, могут быть неспособными воспроизводить предсказания квантовой физики. В данной статье авторы вводят семейство неравенств, которые позволяют проверить модель Леггетта с нелокальными параметрами сравнительно с квантовой физикой, и которые могут быть проверены в эксперименте без дополнительных допущений. Полученные экспериментальные данные противоречат модели Леггетта и согласуются с квантовыми предсказаниями.

*Введение.* Квантовая физика предусматривает точное правило для вычисления вероятности того, что измерение  $A$  и  $B$ , выполненное над двумя физическими системами в состоянии  $|\Psi\rangle$ , приведет к результатам  $(r_A, r_B)$ :

$$P_Q(r_A, r_B|A, B) = \langle \Psi | \mathcal{P}_{r_A} \otimes \mathcal{P}_{r_B} | \Psi \rangle \quad (1)$$

где  $\mathcal{P}_r$  - проектор на подпространство, ассоциированное с измерением результата  $r$ . Для запутанных состояний эта формула предсказывает, что результаты должны быть коррелированы независимо от расстояния между двумя измерительными устройствами. Естественным объяснением для корреляций, устанавливаемых на расстоянии, является аргумент “общего прошлого”: две частицы покидают источник с некоторой общей информацией  $\lambda$ , которую называют локальным параметром (local variable – LV), это и позволяет им вычислять результат; формально  $r_A = f_A(A, \lambda)$  и  $r_B = f_B(B, \lambda)$ . Хотя с первого взгляда это может показаться удовлетворительно, но эта модель не способна воспроизвести все квантовые корреляции: таков знаменитый результат Джона Белла [1], теперь проверенный в большом числе экспериментов. Тот факт, что квантовые корреляции не могут быть связаны ни с LV, ни коммуникациями с досветовой скоростью, называется *квантовой нелокальностью*.

В то время, как нелокальность представляет собой манифестацию квантового запутывания, еще не ясно, насколько действительно фундаментальным является это понятие: сущность квантовой физики может состоять еще в чем-то [2]. Например, индетерминизм является другим важным свойством квантовой физики, не связанным напрямую с нелокальностью. Были исследованы разные порождающие теории, включающие и индетерминизм, и нелокальность, и приведшие к интересным достижениям [3]; но еще неясно, что выделяет квантовая физика. Чтобы добиться прогресса на этом направлении, важно узнать, какие иные альтернативные модели совместимы с квантовой физикой, а какие – нет. Теорема Белла отвергла все возможные LV-модели, теперь мы должны обратиться к моделям, основанным на *нелокальных параметрах* (non-local variables – NLV). Первый пример NLV-модели была модель Суареса и Скарани [4], опровергнутую в ряде экспериментов за последние годы [5]. Другая такая модель была раньше предложена Леггеттом [6]. Эта модель предполагает, что источник эмитирует произведение квантовых состояний  $|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$  с плотностью вероятности  $\rho(\alpha, \beta)$  и подразумевается, что маргинальные вероятности должны быть совместимы с такими состояниями:

$$P(r_A|A) = \int d\rho(\alpha, \beta) \langle \alpha | \mathcal{P}_{r_A} | \alpha \rangle, \quad (2)$$

$$P(r_B|B) = \int d\rho(\alpha, \beta) \langle \beta | \mathcal{P}_{r_B} | \beta \rangle. \quad (3)$$

Эти корреляции, однако, должны включать некоторое нелокальное влияние, иначе этот мир будет отвечать (индетерминистической) LV-модели и уже запрещен теоремой Белла. То что показал Леггетт, так это то, что простое требование совместимости (т.е., что отрицательные вероятности не могут появляться на любом этапе) ограничивает возможные корреляции, даже нелокальные, накладывая неравенства, которые не очень значительно, но явно нарушаются квантовой физикой. Недавний эксперимент [7] показал, что современные установки позволяют в принципе детектировать это нарушение. Однако их опровержение модели Леггетта ослабляется необходимостью использования дополнительных допущений, так как используемое ими неравенство [8], как и у самого Леггетта, подразумевает сбор данных с помощью бесконечно большого числа измерений. В данной статье представлено семейство неравенств, которые позволяют тестировать модель Леггетта сравнительно с квантовой физикой на базе конечного числа измерений. Показано их экспериментальное нарушение парами поляризационно-запутанных фотонов. Делается обзор того, что было выяснено и что еще предстоит выяснить о NLV-моделях.

*Теория.* Мы ограничиваем нашу теорию случаем, когда изучаются квантовые степени свободы кубита. Мы рассматриваем измерения по фон Нейману, которые можно описать единичными векторами на сфере Пуанкаре  $\mathcal{S}: A \rightarrow \vec{a}$  и  $B \rightarrow \vec{b}$ ; их результаты могут быть записаны в виде  $r_A, r_B \in \{+1, -1\}$ . Чистые состояния одиночной частицы могут также быть представлены единичными векторами  $\vec{u}, \vec{v}$  в  $\mathcal{S}$ . Модель Леггетта требует [16], чтобы

$$P(r_A, r_B | \vec{a}, \vec{b}) = \int d\rho(\vec{u}, \vec{v}) P_{\vec{u}, \vec{v}}(r_A, r_B | \vec{a}, \vec{b}) \quad (4)$$

где

$$P_{\vec{u}, \vec{v}}(r_A, r_B | \vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{4} \left[ 1 + r_A \vec{a} \cdot \vec{u} + r_B \vec{b} \cdot \vec{v} + r_A r_B C(\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{b}) \right]. \quad (5)$$

Коэффициенты корреляции  $C(\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{b})$  ограничены только тем требованием, что (5) должно определять распределение вероятности по  $(r_A, r_B)$  при любом выборе измерений  $\vec{a}, \vec{b}$ . Замечательно, что этого ограничения достаточно для вывода неравенств, которые могут нарушаться квантовой физикой [6]. Неравенство, выведенное в [8] (см. также сокращенный вывод в [9]), имеет вид

$$|E_1(\varphi) + E_1(0)| + |E_2(\varphi) + E_2(0)| \leq 4 - \frac{4}{\pi} \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| \quad (6)$$

где величины  $E_j(\theta)$  определяются через коэффициенты корреляции следующим образом:

$$C(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{r_A, r_B} r_A r_B P(r_A, r_B | \vec{a}, \vec{b}) \quad (7)$$

Индекс  $j$  указывает плоскость  $\{\vec{a} \in S | \vec{a} \cdot \vec{n}_j = 0\}$  на сфере Пуанкаре (для  $\vec{n}_j \in S$ ), и две плоскости  $j = 1, 2$ , которые появляются в (6), должны быть ортогональными (т.е.  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ ). Для каждого единичного вектора  $\vec{a}_j$  плоскости  $j$  определим  $\vec{a}_j^\perp = \vec{n}_j \times \vec{a}_j$ . Тогда  $E_j(\theta)$  - это среднее для  $C(\vec{a}_j, \vec{b}_j)$  по всем направлениям  $\vec{a}_j$ , где  $\vec{b}_j = \cos \theta \vec{a}_j + \sin \theta \vec{a}_j^\perp$  [17]. Это – проблематичное свойство неравенства (6): оно может быть проверено только при выполнении бесконечного числа измерений или выполняться за счет дополнительного предположения о вращательной инвариантности коэффициентов  $C(\vec{a}_j, \vec{b}_j)$ , как в [7]. Поэтому естественно попытаться заменить среднее по всем возможным вариантам на среднее по дискретному набору. Это делается на основании следующей оценки. Пусть  $\vec{w}$  и  $\vec{c}$  - два единичных вектора, а  $R_N$  - вращение на угол  $\frac{\pi}{N}$  вокруг оси, ортогональной к  $(\vec{w}, \vec{c})$ . Тогда

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |(R_N^k \vec{c}) \cdot \vec{w}| \geq u_N = \frac{1}{N} \cot \frac{\pi}{2N}. \quad (8)$$

Действительно, пусть  $\tilde{\xi}$  есть угол между  $\vec{w}$  и  $\vec{c}$ , и  $\xi = (\tilde{\xi} - \frac{\pi}{2}) \bmod \frac{\pi}{N}$ , так что  $\xi \in [0, \frac{\pi}{N}[$ : тогда справедливо

$$\sum_{k=0}^{N-1} |(R_N^k \vec{c}) \cdot \vec{w}| = \sum_{k=0}^{N-1} |\cos(\tilde{\xi} + \frac{k\pi}{N})| = \sum_{k=0}^{N-1} \sin(\xi + \frac{k\pi}{N}) = \sin \xi + N u_N \cos \xi \geq N u_N$$

как и было заявлено.

Заменяя полное среднее дискретным средним (8) в доказательствах, приведенных в [8, 9], мы получаем следующее семейство неравенств:

$$\begin{aligned} & |E_1^N(\vec{a}_1, \varphi) + E_1^N(\vec{a}_1, 0)| + |E_2^N(\vec{a}_2, \varphi) + E_2^N(\vec{a}_2, 0)| \\ & \equiv L_N(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \varphi) \leq 4 - 2u_N \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$E_j^N(\vec{a}_j, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} C(\vec{a}_j^k, \vec{b}_j^k) \quad (10)$$

и

$\vec{b}_j = \cos \theta \vec{a}_j + \sin \theta \vec{a}_j^\perp$ ,  $\vec{c}^k = (R_{N,j})^k \vec{c}$  (вращение на угол  $\frac{\pi}{N}$  осуществляется вдоль  $\vec{n}_j$ ). Это определяет  $2N$  и  $4N$  вариантов настроек с каждой стороны. Для чистого синглетного состояния квантовая механика предсказывает для  $L_N(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \varphi)$  значение

$$L_{\Psi^-}(\varphi) = 2(1 + \cos \varphi) \quad (11)$$

независимо от  $N$  и выбора  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ , поскольку состояние инвариантно относительно вращений.

При  $N=1$  неравенство не может нарушаться, т.к.  $u_1 = 0$  [18]. Однако уже при  $N=2$  квантовая физика нарушает это неравенство: это открывает возможность для опровержения модели Леггетта без дополнительных допущений [19]. При  $\text{For } N \rightarrow \infty, u_N \rightarrow \frac{2}{\pi}$  приходим снова к неравенству (6). Подходящий диапазон разности углов  $\varphi$  для проверки нарушения неравенств (9) может быть идентифицирован на основании рис. 1. Наибольшее нарушение для идеального синглетного состояния должно происходить при  $|\sin \frac{\varphi}{2}| = \frac{u_N}{4}$ , т.е. при  $\varphi = 14.4^\circ$  для  $N=2$ , возрастая с  $N$  вплоть до  $\varphi = 18.3^\circ$  при  $\varphi = 18.3^\circ$  при  $N \rightarrow \infty$ .

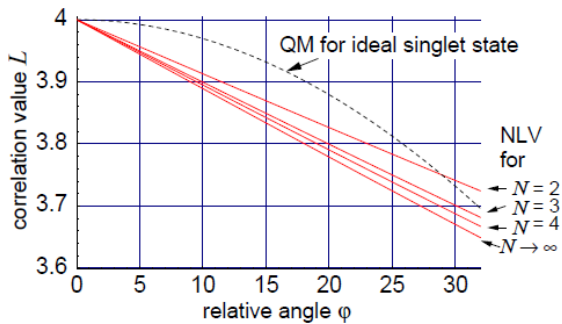


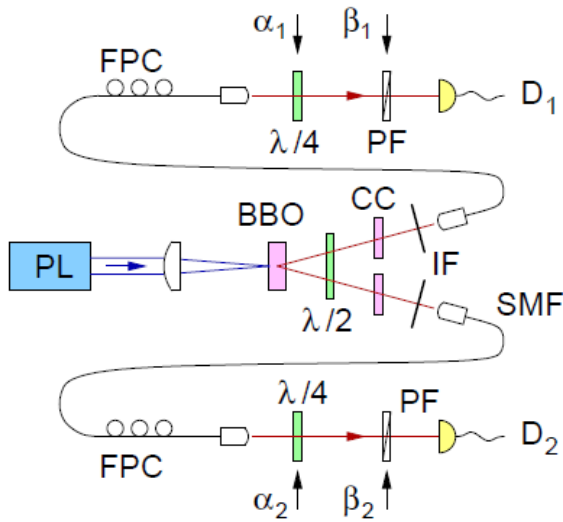
Рисунок 1: Зависимость комбинированных корреляционных параметров  $L(\varphi)$  в функции разделяющего угла  $\varphi$  для предсказания квантовой механики (QM) для чистого синглетного состояния, и границы для моделей с нелокальными параметрами (NLV) в предположении об усреднении по различным числам направлений  $N$ .

**Эксперимент.** Схема эксперимента приведена на рис. 2. Проективные поляризационные измерения для различных настроек двух наблюдателей осуществлялись с использованием четвертьволновых пластинок, вращаемых с помощью моторчиков соответственно на углы  $\alpha_1, \alpha_2$ , а также поглощающих поляризационных фильтров на углы  $\beta_1, \beta_2$  с точностью до 0.1 градуса. Эта комбинация позволяет проектировать на произвольные эллиптические поляризационные состояния. В конечном счете выполнялось фотодетектирование с помощью пассивно охлаждаемого кремниевого туннельного диода, и фотоны пары, поступающие от источника с преобразованием понижения частоты, идентифицировались с помощью схемы совпадений. Компенсирующие кристаллы (CC) и компенсирующие волокна с двойным лучепреломлением (FPC) были отрегулированы так, что удавалось детектировать фотонные пары в синглетном состоянии.

После компенсации с помощью двойного лучепреломления в оптических волокнах, мы наблюдали соответствующие поляризационные корреляции между

двумя плечами с видимостью  $99.5 \pm 0.2\%$  в HV базисе,  $99.0 \pm 0.2\%$  в линейном базисе  $\pm 45^\circ$  и  $98.2 \pm 0.2\%$  в круговом поляризационном базисе. Типичный темп отсчетов составлял  $10100 \text{ с}^{-1}$  и  $8000 \text{ с}^{-1}$  для одиночных событий в обоих плечах и около  $930 \text{ с}^{-1}$  для совпадений с ортогональными позициями поляризаторов. Мы измеряли темп случайных совпадений, используя задержанный сигнал детектора,  $0.41 \pm 0.07 \text{ с}^{-1}$ , что соответствовало ширине окна 5 нс.

Рисунок 2: Экспериментальная установка.



Поляризационно-запутанные пары фотонов генерируются в кристалле бариум-бетабората (BBO) в процессе параметрического понижения частоты света из Ar-лазерного ионного насоса (PL). После компенсации утекающей волны (walk-off compensation) ( $\lambda/2$ , CC), свет пониженной частоты собирается за интерференционными фильтрами (IF) в компенсированных двойным лучепреломлением (FPC) одиночно-модовыми оптическими волокнами (SMF). Поляризационные измерения осуществляются с помощью комбинации четвертьволновой пластинки ( $\lambda/4$ ) и поляризационных фильтров (PF) в плоскости детекторов – счетчиков фотонов D1,2. Базис измерения для каждого плеча (1,2) выбирается путем поворота волновой пластины и поляризационного фильтра на углы  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  соответственно.

Были использованы две ортогональные плоскости на сфере Пуанкаре, включающие все линейные поляризации в одной из них, а также линейные поляризации в плоскости горизонталь-вертикаль (H/V) и круговые поляризации в другой. Таким образом, авторы стремились использовать преимущества наилучших поляризационных корреляций в 'естественном' базисе горизонтальная-вертикальная оси кристалла, понижающего частоту. Каждый из  $4N$  коэффициентов корреляции  $C(\vec{a}, \vec{b})$  в (9) и (10) получался из четырех наборов поляризационных фильтров с помощью соотношения

$$C(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{n_{\vec{a}, \vec{b}} + n_{-\vec{a}, -\vec{b}} - n_{-\vec{a}, \vec{b}} - n_{\vec{a}, -\vec{b}}}{n_{\vec{a}, \vec{b}} + n_{-\vec{a}, -\vec{b}} + n_{-\vec{a}, \vec{b}} + n_{\vec{a}, -\vec{b}}} \quad (12)$$

и четырех показаний счетчиков совпадений  $n_{\pm \vec{a}, \pm \vec{b}}$ , полученных за фиксированное время суммирования  $T = 4 \text{ с}$ . Для  $N = 2, 3$  и  $4$  мы формировали полный порождающий набор из 8, 12 и 16 групп вариантов настроек соответственно, в каждой  $E_j^N(0)$  содержался вариант настройки анализатора HV.

Полученные значения  $L$ , отвечающие неравенствам для  $N = 2, 3$  и  $4$ , показаны на рис. 3, там же изображены границы, соответствующие (9), и математические ожидания, даваемые КМ для чистого синглетного состояния (11). Соответствующие стандартные отклонения для этих результатов были найдены на основе стандартного распределения Пуассона и значений независимых отклонений для результирующих настроек. При  $N = 2$  уже видно очевидное

нарушение границы для модели с нелокальными переменными (NLV); наибольшее нарушение получено при  $N = 4$ , оно превышает границу NLV на 17 стандартных отклонений. Как и ожидалось, экспериментально определенное нарушение растет с увеличением  $N$ . Избранные комбинации  $(N, \varphi)$ , при которых нарушаются границы моделей, представлены в табл. I.

$N$	$\varphi$	$L_{NLV}$	$L_{exp} \pm \sigma$	$L_{exp} - L_{NLV}$
2	12.5°	3.8911	3.9127 ± 0.0033	6.45 $\sigma$
2	15°	3.8695	3.8970 ± 0.0036	7.59 $\sigma$
2	17.5°	3.8479	3.8638 ± 0.0042	3.83 $\sigma$
3	12.5°	3.8743	3.9140 ± 0.0027	14.77 $\sigma$
3	15°	3.8493	3.8930 ± 0.0030	14.58 $\sigma$
3	17.5°	3.8243	3.8608 ± 0.0034	10.67 $\sigma$
3	20°	3.7995	3.8400 ± 0.0036	11.15 $\sigma$
4	12.5°	3.8686	3.9091 ± 0.0024	17.01 $\sigma$
4	15°	3.8424	3.8870 ± 0.0026	16.84 $\sigma$
4	17.5°	3.8164	3.8656 ± 0.0029	17.11 $\sigma$

Таблица I: Избранные значения  $L$ , нарушающие границы NLV-моделей  $L_{NLV}$  при различных значениях  $N$ .

Наши результаты дают хорошее описание в предположении об остаточном шуме при приготовлении синглетного состояния [12]. Мы исходим из небольшой асимметрии  $L_{exp}$  в  $\varphi$  (см. врезку на рис. 3) для выравнивания погрешности поляризатора.

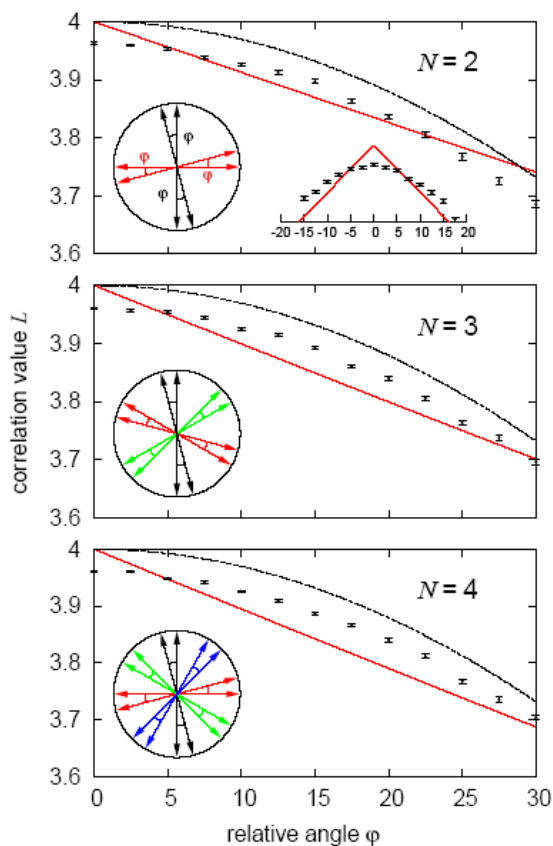


Рисунок 3: Экспериментальные результаты для наблюдавшихся параметров корреляции  $L_N$  (точки), предсказание КМ для чистого синглетного состояния (пунктирные кривые) и границы NLV-моделей (практически прямые линии). Во всех случаях экспериментальные значения превышают NLV-границы для соответствующих значений разностного угла  $\varphi$ .

*Оценки и перспективы.* После очень общего обоснования, приведенного во введении, мы сфокусировались на модели Леггетта. Посмотрим теперь на эту модель в рамках более широкой картины. Была продемонстрирована нелокальность, причем единственный классический механизм, который мог бы объяснить квантовые корреляции, это обмен сигналами. Следовательно, было бы естественным предположить, в качестве альтернативы к квантовой физике, что источник генерирует независимые частицы, которые позже могут обмениваться несущими информацию сигналами. Разумеется, эти сигналы должны распространяться быстрее света, так что эта модель должна выявлять систему отсчета, в которой эти сигналы распространяются: это либо выделенная система отсчета (“квантовый эфир”), в этом случае даже передача сигналов не является логически противоречивой[13]; либо система отсчета определяется измерительными устройствами, в этом случае модель исходит из квантовых предсказаний для взаимно движущихся устройств [4, 5]. Очевидно, это NLV-модели, предсказания которых в точности воспроизводят квантовые предсказания. Явными примерами служат механика Бома [14] и, в случае двух кубитов, модель Тонера-Бэкона [15]. Обе они являются детерминистическими.

Теперь, в механике Бома, если первая частица измерена в состоянии А, то соотношение (2) может выполняться, но соотношение (3) – нет. Это замечание проливает дополнительный свет на модель Леггетта, где должны быть верны оба соотношения: частица, принимающая сигналы с информацией, может учитывать ее для формирования нелокальных корреляций, но требуется также формировать результаты, которые отвечают маргиналам, ожидаемых для одиночных локальных параметров.

В заключение следует сказать, что общая цель введения, состоявшая именно в том, чтобы уточнить сущность квантовой физики, еще не достигнута. Однако модель Леггетта и ее экспериментальное опровержение, описанное в данной статье, дополняют продвижение к указанной цели.

*Благодарности.* Мы благодарны Anthony J. Leggett, Artur Ekert и Jean-Daniel Bancal за плодотворное обсуждение. С.В. благодарит за гостеприимство National University of Singapore. Эта работа была частично поддержана ASTAR грант SERC-052-101-0043, Европейским проектом QAP IP и Швейцарской организацией Swiss NCCR “Quantum Photonics”.

[1] J.S. Bell, *Physics* 1, 195 (1964)

[2] S. Popescu and D. Rohrlich, *Found. Phys.* 24, 379–385 (1994).

[3] See e.g. N.J. Cerf, N. Gisin, S. Massar, S. Popescu, *Phys. Rev. Lett.* 94, 220403 (2005); N. Brunner, N. Gisin, V. Scarani, *New J. Phys.* 7, 88 (2005); N. Linden, S. Popescu, A.J. Short, A. Winter, *quant-ph/0610097*; H. Barnum, J. Barrett, M. Leifer, A. Wilce, *quant-ph/0611295*.

[4] A. Suarez, V. Scarani, *Phys. Lett. A* 232, 9 (1997)

[5] H. Zbinden, J. Brendel, N. Gisin, W. Tittel, *Phys. Rev. A* 63, 022111 (2001); A. Stefanov, H. Zbinden, N. Gisin, A. Suarez, *Phys. Rev. Lett.* 88, 120404 (2002)

[6] A.J. Leggett, *Found. Phys.* 33, 1469 (2003)

[7] S. Gröblacher, T. Paterek, R. Kaltenbaek, C. Brukner, M. Zukowski, M. Aspelmeyer, A. Zeilinger, *Nature* 446, 871 (2007)

[8] Дополнительная информация из работы [7].

[9] S. Parrott, *arXiv:0707:3296*

[10] P.G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilinger, A.V. Sergienko, Y. Shih, *Phys. Rev. Lett.* 75, 4337 (1995)

[11] C. Kurtsiefer, M. Oberparleiter, H. Weinfurter, *Phys. Rev. A* 64, 023802 (2001)

- [12] A. Cabello, A. Feito, A. Lamas-Linares, Phys. Rev. A 72, 052112 (2005)
- [13] Ph. Eberhard, A Realistic Model for Quantum Theory with a Locality Property, in: W. Schommers (ed.), Quantum Theory and Pictures of Reality (Springer, Berlin, 1989)
- [14] D. Bohm, B.J. Hiley, The undivided universe (Routledge, New York, 1993)
- [15] B. F. Toner, D. Bacon, Phys. Rev. Lett. 91, 187904 (2003)
- [16] Специальная форма маргинальных распределений в случае поляризации называется законом Малюса.
- [17] Этот шаг учтен в [8] после (27), в работе [9] перед (8). Вывод исходных неравенств производится через тот же самый шаг в работе [6] между (3.9) и (3.10).
- [18] Действительно, данные, измеренные на синглетном состоянии при  $N = 1$ , как в работе [7], могут быть получены с помощью явной NLV модели типа Леггета, представленной в [8]. В самом деле, условие справедливости для NLV-модели состоит в том, что на сфере Пуанкаре существуют единичные вектора  $\vec{u}, \vec{v}$  такие, что для всех пар наблюдаемых  $\vec{a}, \vec{b}$  в эксперименте имеем  $|\vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{u} \cdot \vec{a}| \leq 1 \mp \vec{v} \cdot \vec{b}$  (уравнение 10) работы [8]) или, эквивалентно,  $|\vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{v} \cdot \vec{b}| \leq 1 \mp \vec{u} \cdot \vec{a}$ . Теперь, для случая  $N=1$  следует измерять четыре набора наблюдаемых  $\vec{a}_j, \vec{b}_j = \cos \theta \vec{a}_j + \sin \theta \vec{a}_j^\perp$  в плоскостях  $j = 1, 2$  и при  $\theta = 0, \varphi$ . Тогда для  $\vec{u} = -\vec{v}$ , ортогональных как к  $\vec{a}_1^\perp$ , так и к  $\vec{a}_2^\perp$  при любых  $\theta$ , имеем  $|\vec{a}_j \cdot \vec{b}_j \pm \vec{v} \cdot \vec{b}_j| = |\cos \theta \mp \vec{u} \cdot (\cos \theta \vec{a}_j + \sin \theta \vec{a}_j^\perp)| = |\cos \theta (1 \mp \vec{u} \cdot \vec{a}_j)| \leq 1 \mp \vec{u} \cdot \vec{a}_j$ , что и требуется.
- [19] Заметим, что поскольку используемая при тестировании модель подразумевает NLV, нет таких факторов, как ловушки локальности или памяти. Ловушка детектирования пока остается в повестке.