

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Квантовая специфика нелинейного светоделителя

А.В. Белинский, М.Х. Шульман

Рассматривается интересное, на взгляд авторов, явление — преобразование света нелинейным светоделителем. Светоделитель представляет собой плоскую границу раздела двух прозрачных диэлектриков, из которых по крайней мере один обладает керровской нелинейностью, т.е. зависимостью показателя преломления от интенсивности пронизывающего его излучения. Интересно, что квантовая и классическая теории описания светоделителя дают прямо противоположные предсказания поведения фазовых флуктуаций преобразованного им излучения. Согласно квантовой теории фазовые флуктуации зависят от степени подавления амплитудных флуктуаций в соответствии с принципом неопределённости Гейзенберга, а согласно классической — фазовые флуктуации должны оставаться неизменными. Выявлена фундаментальная причина этих различий. Этот тип квантовых парадоксов замечателен, кроме того, тем, что исходный пучок можно не просто разделить на два, но и создать условия, при которых в одном из них будут преобладать амплитудные шумы, а в другом — фазовые, т.е. фактически осуществить селекцию фотонных флуктуаций. Обобщаются и развиваются результаты оригинальных статей, посвящённых данной тематике.

PACS numbers: 03.65. – w, 03.65.Sq, 42.65. – k

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201410i.1135

Содержание

1. Введение (1135).
 2. Классическое описание светоделителя (1136).
 3. Точное квантовое решение в представлении Шрёдингера (1139).
3.1. Селекция квантовых флуктуаций и повышение точности одновременного измерения величин, связанных соотношением неопределённости Гейзенберга. 3.2. Поиск оптимальной компоновки и каскад светоделителей.
 4. Квазиклассическое описание (1143).
 5. Линеаризованное по флуктуациям приближение. Представление Гейзенберга (1143).
 6. Заключение (1146).
 7. Приложение 1 (1147).
 8. Приложение 2 (1147).
- Список литературы (1147).

1. Введение

Квантовые парадоксы являются удивительным объектом интеллектуального наслаждения не только потому, что всё парадоксальное интересно и, как правило, красиво, но и ввиду более прагматической возможности: нащупать ту грань, переходя которую модельное описание физических процессов становится просто невозможным. Сколько ни говорить, например, о корпуску-

лярно-волновом дуализме, это ничего не принесёт в понимание этого явления, кроме новых терминов и слов, поскольку нет наглядной модели, которая бы адекватно описывала все имеющиеся экспериментальные результаты. Жажда познания, однако, никогда не ограничится безукоризненной в количественном отношении теорией, каковой является квантовая физика. Сознание человека неудержимо стремится к постижению смысла происходящего. Не претендуя на роль пророка, мы всё же полагаем, что адекватную интерпретацию квантовой теории, по-видимому, стоит искать на путях новых пространственно-временных концепций, поскольку в стандартное общепринятое четырёхмерное пространство-время, как в некую сцену, на которой разыгрываются события, сугубо квантовые эффекты никак не вмещаются, что и является причиной возникновения целого ряда фундаментальных квантовых парадоксов. К таковым относятся прежде всего эффекты, связанные с так называемой *квантовой нелокальностью*: парадокс Эйнштейна – Подольского – Розена [1 – 3]; парадоксы Белла [4] (см. также, например, [5 – 12]); интерференция одиночных квантовых частиц (см., например, [12 – 14]); трёхфотонная интерференция [15 – 17] (см. также [12]) и квантовый парадокс Зенона (см., например, [13, 18 – 20]), который можно рассматривать как нарушение принципа причинности, проявляющееся в том, что последующее событие определяет предыдущее. Разрешение этих фундаментальных парадоксов потребует, по-видимому, глобального пересмотра наших основополагающих моделей.

Но существует и целый класс парадоксов, не связанных непосредственно с концепцией пространства-времени. К ним можно отнести, например: многофотонную

А.В. Белинский, М.Х. Шульман. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы 1, стр. 2, 119991 Москва, Российская Федерация
E-mail: belinsky@inbox.ru, shulman@dol.ru

Статья поступила 6 марта 2014 г.

интерференцию, в которой интерференционные минимумы классического описания сменяются максимумами квантового [21]; недавно обнаруженный квантовый парадокс Бернштейна [22], который, конечно, не перевернёт наших представлений о бытии, но просто является очень красивым; квантовый парадокс нелинейного светоделиителя [23–26], в котором фазовые флуктуации света возникают как будто бы из ничего. Хотелось бы надеяться, что и последний парадокс будет интересен читателям.

Чтобы легче войти в смысл задачи, рассмотрим простейшую ситуацию. Плоская поверхность прозрачного диэлектрика отражает свет. Пусть теперь диэлектрик обладает кубической керровской нелинейностью, причём такой, что с возрастанием интенсивности света его показатель преломления уменьшается. Это так называемая *нелинейность самодефокусировки*, поскольку в такой среде световой пучок с плоским фазовым фронтом и гауссовым профилем интенсивности становится расходящимся. Ясно, что с возрастанием интенсивности света разность показателей преломления среды и воздуха уменьшается, следовательно, уменьшается и френелевский коэффициент отражения, стабилизируя флуктуации интенсивности в отражённом пучке по сравнению с таковыми в падающем. Между тем фаза при этом не меняется. Если такая стабилизация распространяется не только на классические, но и на фотонные флуктуации, то как быть с принципом неопределённости? Ведь неопределённости амплитуды и фазы связаны между собой и уменьшение одной должно сопровождаться увеличением другой.

Более интересным объектом исследования с точки зрения эффективности амплитудной стабилизации, однако, является нелинейный светоделиитель, представляющий собой границу раздела двух прозрачных диэлектриков (рис. 1). Пусть один из них обладает кубической керровской самофокусирующей нелинейностью, обуславливающей увеличение показателя преломления с возрастанием интенсивности излучения. Коэффициенты пропускания и отражения такой границы раздела изменяются с изменением интенсивности света в соответствии с формулами Френеля.

Пусть линейная среда предшествует нелинейной и показатель преломления второго диэлектрика в рабочем режиме, т.е. с учётом нелинейной добавки, превышает показатель преломления первого, тогда с возраста-

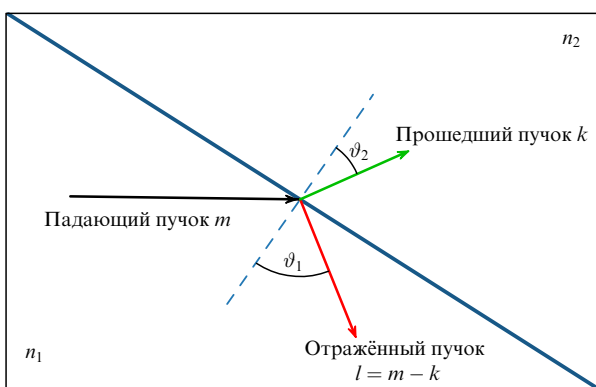


Рис. 1. Схема светоделиителя. ϑ_1 и ϑ_2 — углы падения и преломления. На границу раздела падает m фотонов, отражается от неё l фотонов, а проходит через неё $k = m - l$ фотонов.

нием интенсивности излучения увеличивается и показатель преломления, значит, увеличивается и коэффициент отражения границы раздела, а коэффициент пропускания уменьшается. Следовательно, флуктуационное возрастание интенсивности входного пучка будет частично компенсироваться уменьшением коэффициента пропускания. Таким образом, происходит насыщение или некоторое "запирание" системы, приводящее к стабилизации интенсивности прошедшего света. Ощутимая стабилизация может проявляться и в отражённом от границы раздела пучке, если показатель преломления с увеличением интенсивности излучения, напротив, уменьшается или изменено соотношение показателей преломления: первый больше второго.

Рассмотрим одномодовый случай плоских монохроматических волн. Фаза плоской волны, отражённой или прошедшей, вблизи плоской границы раздела прозрачных сред инвариантна с точностью до возможного скачка на π в отражённом пучке. При этом складывается парадоксальная ситуация: амплитудные флуктуации прошедшего либо отражённого пучков могут уменьшаться, а фазовые должны оставаться неизменными, что, конечно, приведёт к нарушению принципа неопределённости Гейзенберга. Исследованию возникающей при этом коллизии в основном и посвящена настоящая статья.

Для того чтобы не учитывать фазового набега в прозрачных средах, мы рассматриваем пучки именно *вблизи* (на расстоянии не более длины волны) границы раздела. Кроме того, выделение такого узкого слоя (например, в результате размещения его между двумя плоскопараллельными пластинами из линейных материалов) избавляет нас от эффекта неустойчивости плоской волны в среде с самофокусирующей нелинейностью, являющегося классическим результатом нелинейной оптики, поскольку на малой длине распространения света неустойчивости не возникает.

Отметим также, что изучение приготовления субпуассоновских состояний, в частности, посредством нелинейного светоделиителя, не только представляет фундаментальный интерес, но и открывает широкие перспективы практического применения для создания сверхточных измерительных систем. Если в источнике света подавлены фотонные флуктуации по сравнению с таковыми в когерентном состоянии, отличающемся от вакуума лишь постоянной составляющей идеального нефлуктуирующего сигнала, то можно повысить точность измерительной системы или разрешающую способность изображения сверх квантового предела, определяемого вакуумными шумами.

2. Классическое описание светоделиителя

Рассмотрение преломления света границей раздела двух сред естественно начать с закона Снеллиуса

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2 \quad (2.1)$$

и формулы Френеля для амплитудного коэффициента отражения [27]

$$\rho = -\frac{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \quad (2.2)$$

которая справедлива в случае плоскополяризованного света с вектором напряжённости электрического поля,

перпендикулярным плоскости чертежа (так называемая s-поляризация). Для другой, взаимно ортогональной, поляризации (р-поляризации) синусы заменяются тангенсами.

Если нет потерь, то коэффициенты пропускания и отражения связаны простым соотношением:

$$\tau^2 + \rho^2 = 1, \quad (2.3)$$

следующим из закона сохранения энергии.

Сразу отметим, что анализируются только случаи режимов прохождения света, а полное внутреннее отражение из рассмотрения исключается, поскольку эффекта подавления фотонных флуктуаций при его реализации мы не получим.

Нелинейность одной из граничащих сред означает зависимость свойств этой среды от интенсивности пронизывающего её излучения. Например, керровская нелинейность не изменяет частотного спектра света, но влияет на показатель преломления. В случае нелинейности первой среды

$$n_1 = n_{10} + \chi(\sqrt{m} \pm \sqrt{l})^2, \quad n_2 = \text{const}, \quad (2.4a)$$

поскольку в первой среде одновременно присутствуют и падающая, и отражённая волны. Эти волны складываются когерентно, в отклике среды возникают интерференционные нелинейные члены, и в общем случае волны становятся кноидальными, однако последние возникают в объёме среды, а мы рассматриваем тонкий слой вблизи границы раздела, где фазовый набег отражённой волны либо отсутствует, либо равен π при отражении от более плотной среды. В последнем случае в формуле (2.4a) следует брать разность амплитуд $\sqrt{m} - \sqrt{l}$, а при отражении от менее плотной среды — их сумму $\sqrt{m} + \sqrt{l}$.

Для второй нелинейной среды соответствующие выражения проще:

$$n_2 = n_{20} + \chi k, \quad n_1 = \text{const}, \quad (2.4б)$$

где n_{j0} — показатель преломления в темноте, χ — коэффициент, пропорциональный кубической нелинейности среды $\chi^{(3)}$. Для удобства сопоставления с квантовым подходом мы условно измеряем интенсивность света числами фотонов в некотором объёме квантования. Эти безразмерные величины, разумеется, пропорциональны интенсивностям рассматриваемых плоских монохроматических волн.

Решение системы уравнений (2.1)–(2.4) с учётом очевидных соотношений для комплексных амплитуд прошедшей и отражённой волн

$$a_t = \tau a_i, \quad a_r = \rho a_i \quad (2.5)$$

даст искомое соотношение между входной и выходными волнами. Индексы t, r, i относятся к проходящему, отражённому и падающему пучкам соответственно.

Аналитического решения, к сожалению, получить не удаётся. Поэтому для исследования статистических характеристик такого пассивного нелинейного преобразователя приходится прибегать к численному эксперименту. Наиболее информативным представлением результатов будет трёхмерное распределение вероятностей комплексных амплитуд прошедшего и отражённого пучков в зависимости от такового распределения на входе. Итак, осветим наш светоделитель идеальным лазером. Распределение Вигнера $W(X, Y)$, описываю-

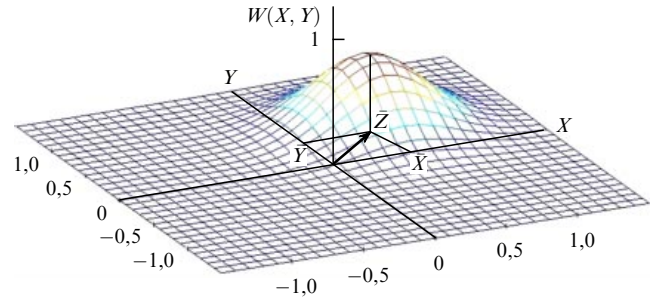


Рис. 2. Распределение Вигнера когерентного состояния: вектор $\bar{z} = \{\bar{X}, \bar{Y}\}$ — средняя комплексная амплитуда, \bar{X} и \bar{Y} — её средние квадратурные компоненты. Нам удобнее использовать именно квадратурные компоненты X и Y вместо используемых в [28] обобщённых координаты и импульса q и p , которые больше в $\sqrt{2}$ раз.

щее двумерную плотность вероятности того, что действительная составляющая комплексной амплитуды равна квадратурной компоненте X , а мнимая — квадратурной компоненте Y , для когерентного света идеального лазера, как известно, представляет собой гауссоид вращения (рис. 2), сдвинутый на величину средней амплитуды [28]:

$$W_{\text{coh}}(X, Y) = \frac{2}{\pi} \exp\left(-2[(X - \bar{X})^2 + (Y - \bar{Y})^2]\right). \quad (2.6)$$

Нормировка квадратурных компонент выбирается так, чтобы средняя интенсивность света $\bar{X}^2 + \bar{Y}^2$ равнялась среднему числу фотонов в моде.

Что же будет на выходах? Если известна функциональная зависимость комплексных амплитуд выходов от входной амплитуды (и обратная зависимость), то можно найти распределения вероятностей этих амплитуд. Поскольку аналитическое описание весьма громоздко, можно использовать численный метод Монте-Карло. Результат компьютерного расчёта представлен на рис. 3. Видно, что для проходящего пучка распределение вероятностей получается "сплюснутым" по действительной компоненте, которая при действительной средней амплитуде определяет флуктуации интенсивности света. Таким образом, эти флуктуации на самом деле стабилизируются. В отражённом пучке — наоборот, хотя бы в силу закона сохранения энергии. Ведь наша система пассивна и недиссипативна. Это видно и из представленных на рис. 4 распределений интенсивностей проходящего $P(|a_t|^2)$ и отражённого $P(|a_r|^2)$ пучков.

Для более детального анализа можно не просто выделить отдельные сечения трёхмерных распределений вероятностей, но и перейти к анализу так называемых областей неопределённости. Эти области получаются так. Действительная и мнимая оси наших распределений представляют собой квадратурные компоненты комплексных амплитуд:

$$X = \frac{a + a^*}{2}, \quad Y = \frac{a - a^*}{i2}. \quad (2.7)$$

При анализе шумов нас интересуют прежде всего флуктуационные компоненты этих квадратур:

$$\Delta X = X - \bar{X}, \quad \Delta Y = Y - \bar{Y}. \quad (2.8)$$

Среднюю амплитуду по-прежнему полагаем действительной, равной средней квадратуре \bar{X} . Тогда ΔX определяет амплитудные флуктуации, а ΔY — фазовые.

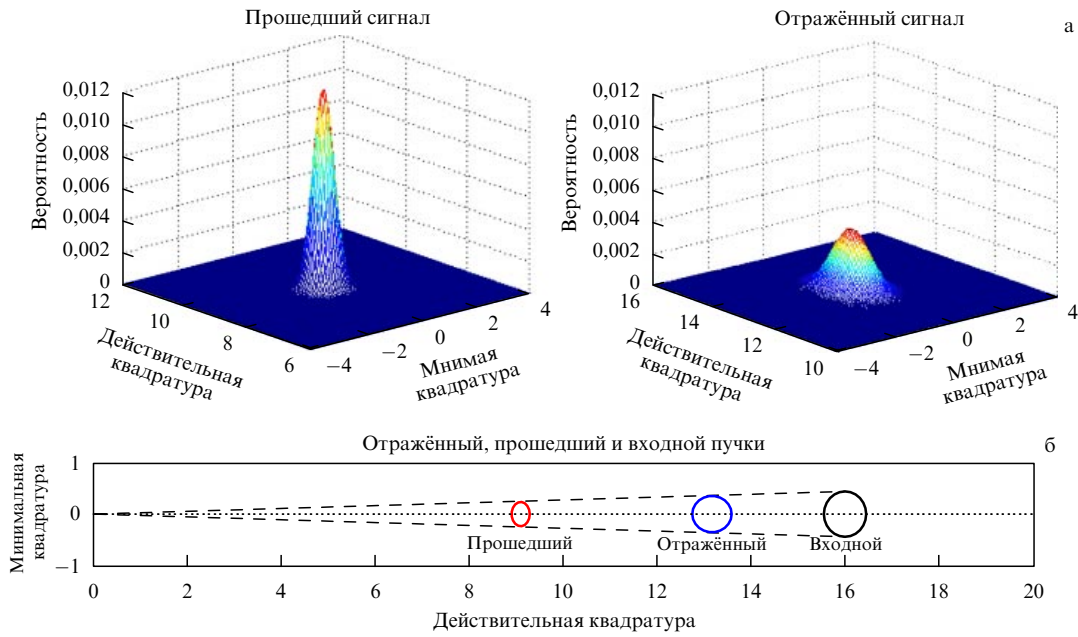


Рис. 3. Трёхмерные распределения вероятностей комплексных амплитуд выходных пучков (а) и их сечения (б), которые точно вписываются в один и тот же угол, характеризующий флуктуации фазы. Первая среда линейна, $n_1 = 1,5$. Вторая среда нелинейна, $n_2 = 1,51 + 0,001k$. Стабилизируется проходящий пучок. Угол падения 88° .

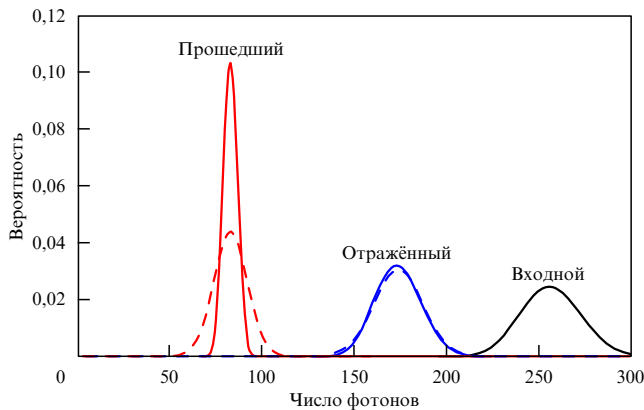


Рис. 4. Распределения вероятностей интенсивностей отражённого, проходящего и входного пучков при тех же параметрах системы, что и для рис. 3. Для сравнения штриховыми кривыми показаны пуассоновские распределения, характерные для когерентного состояния.

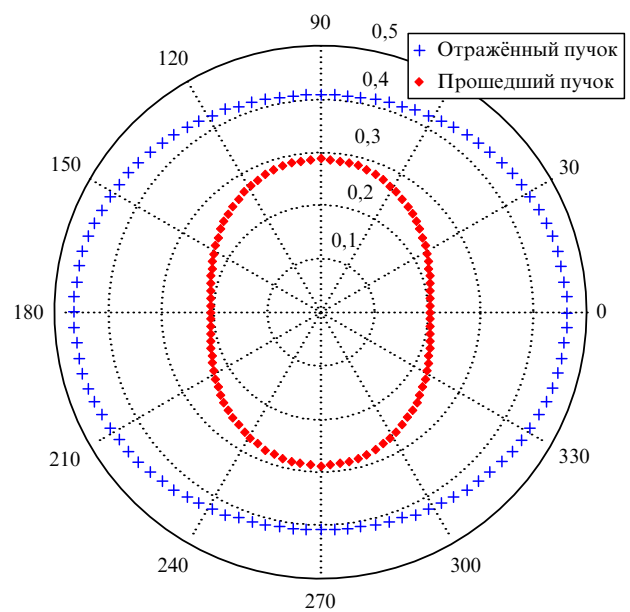


Рис. 5. Области неопределённости выходных пучков. Для когерентных состояний эти области являлись бы окружностями.

Последние приблизительно имеют вид

$$\Delta\phi \approx \frac{\Delta Y}{\bar{X}} \tag{2.9}$$

при $\bar{X} \gg 1$.

Дисперсии квадратур $\langle \Delta X^2 \rangle$, $\langle \Delta Y^2 \rangle$ и их среднеквадратические отклонения $\sqrt{\langle \Delta X^2 \rangle}$, $\sqrt{\langle \Delta Y^2 \rangle}$ характеризуют только флуктуации вдоль действительной и мнимой осей распределений вероятностей. Флуктуации более общего вида определяются обобщённой квадратурой:

$$\Delta Q(\theta) = \frac{\Delta a \exp(-i\theta) + \Delta a^* \exp(i\theta)}{2}, \tag{2.10}$$

которая при вращении на угол θ даст нам все возможные значения флуктуационных квадратур. Например, при $\theta = 0$ это просто ΔX , а при $\theta = \pi/2$ — ΔY . На рисунке 5 представлены области неопределённости $R(\theta) = \sqrt{\langle \Delta Q^2(\theta) \rangle}$ отражённого и проходящего излучений. Видно, что амплитудные флуктуации проходящего

пучка подавлены, а отражённого — не подавлены. Однако фазовые флуктуации в силу инвариантности фазы одинаковы для всех трёх пучков: падающего, отражённого и проходящего. Это ясно и из рис. 3б: все три сечения распределений вероятностей точно вписываются в один и тот же угол, характеризующий фазовые флуктуации пучков. Прежде чем сравнить эти результаты с результатом строгого квантового рассмотрения, проиллюстрируем их ещё одним наглядным примером.

Селекция амплитудной модуляции классического сигнала на фоне постоянной составляющей. Подадим на вход светоделителя не постоянный по амплитуде сигнал, а, скажем, гармонически промодулированный так,

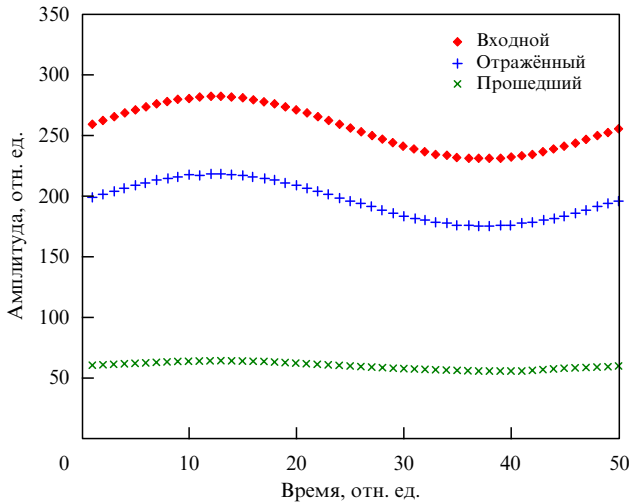


Рис. 6. Преобразование гармонически промодулированного сигнала (верхняя кривая) нелинейным светоделителем. Прошедший пучок (нижняя кривая) стабилизировался: отношение амплитуды модуляции к среднему значению составило 0,068, в отличие от 0,1 на входе, а флуктуации перешли в отраженный пучок (средняя кривая), где это соотношение составило 1,1, т.е. в пассивном устройстве произошло относительное усиление сигнала. Первая среда линейна, $n_1 = 1,3$. Вторая среда нелинейна, $n_2 = 1,41 + 0,0028k$. Стабилизируется проходящий пучок. Угол падения 88° .

чтобы амплитуда модуляции была значительно меньше средней (рис. 6). Что тогда будет на выходах? Прошедший, стабилизированный, пучок, разумеется, станет более стабильным по интенсивности (нижняя кривая на рис. 6). Но куда делась энергия флуктуаций? Конечно, она перейдет в другой, отраженный, пучок, усилив флуктуации относительно их среднего значения (средняя кривая). И хотя существует множество способов выделения сигнала на фоне постоянного пьедестала, это является еще одним способом, наглядно иллюстрирующим преобразование амплитудно-модулированного света нелинейным светоделителем.

3. Точное квантовое решение в представлении Шрёдингера

Задачи квантовой нелинейной оптики, за редким исключением (например, квантовые шрёдингеровские солитоны), как правило, точно решить не удастся. Не удавалось это вначале и в случае рассматриваемой задачи. Однако необходимость детального анализа возникшего парадокса потребовала сосредоточить усилия именно в этом направлении, что в конечном счете увенчалось успехом [25, 26].

Пусть светоделитель (рис. 7) освещается слева модой в фоковском состоянии $|m\rangle$ с определенным числом фотонов m . Но у него есть и другой возможный вход — сверху. Даже при отсутствии на входе сверху излучения там будет вакуум $|0\rangle$. Если бы светоделитель был линейным, то состояние на выходе описывалось бы вектором [28]

$$|\psi\rangle = \sum_{k=0}^m \sqrt{C_k^m} \tau^k \rho^{m-k} |k\rangle |l\rangle. \quad (3.1)$$

Здесь k — число прошедших фотонов, $l = m - k$ — число отраженных фотонов, τ и ρ — френелевские амплитудные

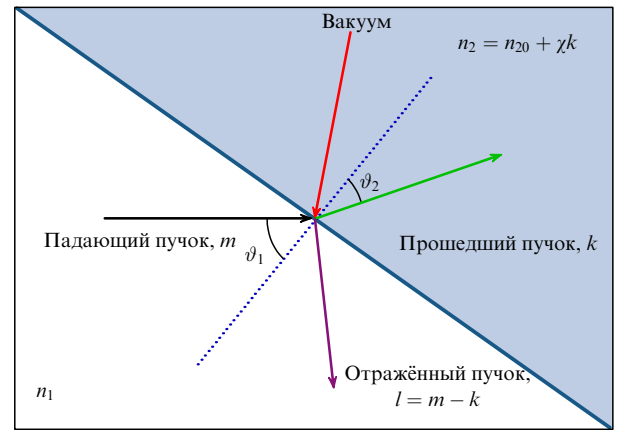


Рис. 7. Нелинейный светоделитель со второй нелинейной средой. ϑ_1 и ϑ_2 — углы падения и преломления. На первом входе когерентная мода с плоским волновым фронтом, а на втором — вакуум.

коэффициенты пропускания и отражения, C_k^m — биномиальный коэффициент.

Соотношение (3.1) является точным квантовым результатом, однако оно имеет простой физический смысл: фотоны в данном случае ведут себя как обычные классические несвязанные частицы. Например, вероятность прохождения одного фотона равна τ^2 , а вероятность прохождения k фотонов — τ^{2k} . Вероятность того, что прошло k фотонов, а отразилось $l = m - k$ фотонов, равна произведению $(\tau^2)^k (\rho^2)^{m-k}$. Биномиальный коэффициент $C_k^m = m! / (k!(m-k)!)$ появляется вследствие эквивалентности всех возможных сочетаний прошедших и отраженных фотонов. Но поскольку вектор состояния представляет собой не саму вероятность, а её амплитуду, извлекаем квадратный корень.

Нелинейность можно учесть функциональной зависимостью τ и ρ от $m \pm l$ в случае нелинейной первой среды и линейной второй и от k — в обратном случае. Если обе граничащие между собой среды нелинейны, то обе зависимости будут присутствовать одновременно. При этом можно использовать обычные формулы для τ и ρ (2.2) и (2.3) с учётом того, что нелинейная добавка показателя преломления пропорциональна числу фотонов в среде, а коэффициент пропорциональности χ в свою очередь пропорционален коэффициенту кубической нелинейности $\chi^{(3)}$.

При произвольном состоянии на входе $|z\rangle$, например когерентном $|z\rangle$, его можно разложить по фоковскому базису:

$$|z\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} D_m |m\rangle. \quad (3.2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\propto \sum_{m=0}^{\infty} D_m \sum_{k=0}^m \sqrt{C_k^m} \tau^k \left(\frac{m \pm l}{k} \right) \rho^l \left(\frac{m \pm l}{k} \right) |k\rangle |m-k\rangle \equiv \\ &\equiv \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m A_{kl} |k\rangle |l\rangle. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь двухстрочные аргументы при τ и ρ означают зависимость от верхней или нижней строк для той или

иной последовательности расположения нелинейной и линейной сред, о чём было сказано выше. Вследствие нелинейности задачи приходится производить перенормировку, чтобы выполнялось условие $\langle \psi | \psi \rangle = 1$.

В этом переходе есть одна тонкость. Если на входе было фоковское состояние, то на выходах, разумеется, будут не фоковские состояния: числа фотонов k и l могут быть разными. Точнее, выходные состояния представляют собой суперпозицию фоковских состояний. Так какому же из них должна соответствовать нелинейность? Будем рассуждать операционально. Если мы детектируем на выходах фотоны, то в каждой реализации мы получим вполне определённые их числа k и l . Именно этими числами и будет определяться нелинейность, что и отражено в (3.3). Таким образом, на входе было тоже определённое число фотонов: $m = k + l$.

Физический смысл квадратов коэффициентов $A_{kl}^2 = |\langle l | \langle k | \psi \rangle|^2$ очень прост: это вероятность того, что пройдёт k фотонов и одновременно отразится l фотонов, т.е. мы имеем дело с двумерной условной вероятностью. Теперь нетрудно найти распределения вероятностей обнаружить определённое число фотонов в отражённом и проходящем пучках:

$$P_l = \sum_{k=0}^{\infty} A_{kl}^2, \quad P_k = \sum_{l=0}^{\infty} A_{kl}^2, \quad (3.4)$$

которые представлены на рис. 8. Видно, что в проходящем пучке сформировалось субпуассоновское состояние, а в отражённом — суперпуассоновское, т.е. качественно всё это напоминает классические результаты (см. рис. 4).

Особенности приближённого расчёта коэффициентов A_{kl} рассмотрены в приложении 1.

Более подробную информацию о квантовом состоянии световых полей можно получить из распределений Вигнера, являющихся квантовыми аналогами классических распределений, представленных на рис. 3. Они получают следующим образом.

Для того чтобы не потерять информацию о фазе, можно построить проекцию нашего вектора состояния $|\psi\rangle$ на когерентное состояние $|z\rangle$, т.е. найти скалярное произведение $\langle \psi | z \rangle$. Квадрат его модуля даст так назы-

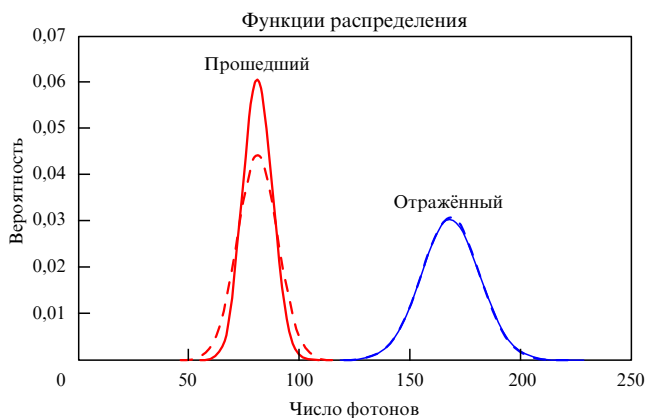


Рис. 8. Распределения вероятностей чисел фотонов в выходных пучках. Для сравнения штриховыми кривыми показаны пуассоновские распределения. Исходные параметры системы такие же, как и на рис. 3. Наиболее вероятное число отражённых фотонов 169, наиболее вероятное число прошедших фотонов 81 (среднее число входных фотонов 250).

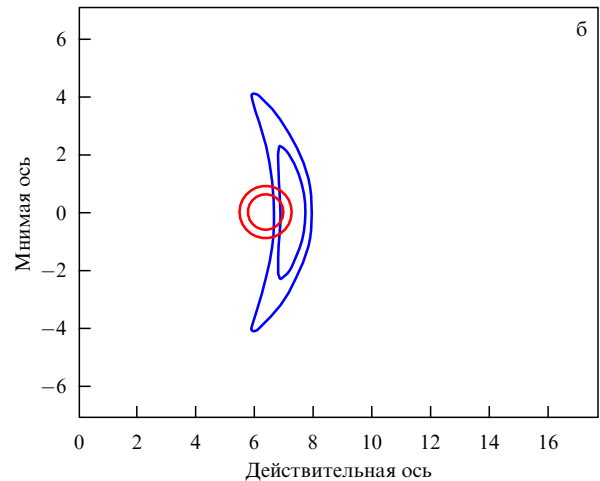
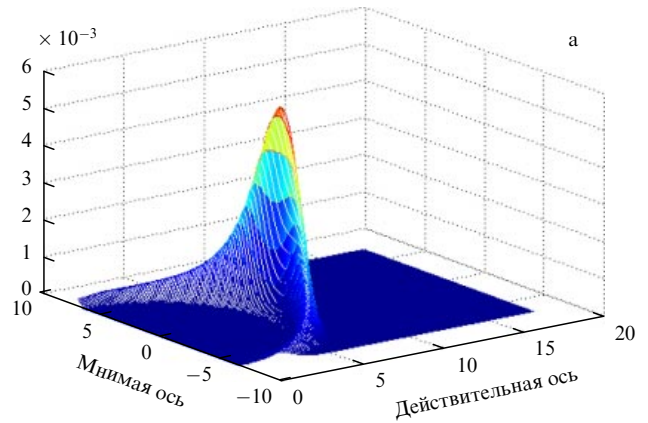


Рис. 9. Q -распределение проходящего пучка (а) и его сечения (б) на относительных уровнях 0,2 и 0,5. Для сравнения на сечениях приведены круги, характерные для когерентного состояния.

ваемое Q -распределение:

$$Q(X, Y) = |\langle \psi | z \rangle|^2. \quad (3.5)$$

Варьируя среднюю комплексную амплитуду когерентного состояния $z = \{X, Y\}$ по комплексной плоскости, мы как будто "прощупываем" наше состояние $|\psi\rangle$ измерительным прибором с аппаратной функцией

$$W_{\text{coh}}(X, Y) = \frac{2}{\pi} \exp \left\{ -2[(X - \bar{X})^2 + (Y - \bar{Y})^2] \right\}$$

когерентного состояния (см. рис. 2). Иными словами, $Q(X, Y)$ представляет собой свёртку распределения Вигнера $W(X, Y)$ с распределением для когерентного состояния [28]:

$$Q(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(X', Y') W_{\text{coh}}(X - X', Y - Y') dX' dY'. \quad (3.6)$$

Распределение (3.6) представлено на рис. 9 для тех же исходных данных, что и на рис. 3 и 8.

Итак, вычислив $Q(X, Y)$ согласно (3.5), с помощью прямого и обратного фурье-преобразований получаем $W(X, Y)$:

$$W(X, Y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x, y) \exp[-i(\xi x + \eta y)] dx dy \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\text{coh}}(x, y) \exp[-i(\xi x + \eta y)] dx dy \times \exp[i(\xi X + \eta Y)] d\xi d\eta. \quad (3.7)$$

Но как вычислить $Q(X, Y)$ отдельно для проходящего и отражённого пучков, если вектор состояния $|\psi\rangle$ описывает их одновременно? Строго говоря, надо искать двойное скалярное произведение $\langle\psi|z_t\rangle|z_r\rangle$, т.е. условную вероятность того, что амплитуда проходящего пучка равна z_t , а отражённого — z_r . Перейти к описанию только одного пучка, следовательно, можно просуммировав вероятности всех возможных амплитуд другого:

$$Q_l(X, Y) = \sum_l |\langle\psi|z_l\rangle|^2. \quad (3.8)$$

Качественно распределение Вигнера похоже на Q -распределение, показанное на рис. 9, только распределение Вигнера имеет более резкие очертания. Это типично субпуассоновское распределение с подавленными амплитудными флуктуациями — серповидностью с растянутостью по дуге окружности и увеличенными фазовыми флуктуациями. Собственно говоря, другого результата трудно было ожидать: ведь принцип неопределённости Гейзенберга никто не отменял. Но каков механизм "раскачивания" фазы? Какая сила "трясёт" фазу в нашем эксперименте? Принцип неопределённости даёт формальное математическое объяснение. Но хотелось бы иметь хотя бы какую-то физическую модель. На эти вопросы мы будем искать ответы в разделах 4, 5. А пока уточним наши результаты, дав более детальное описание.

Как и в классическом случае, фазовые флуктуации можно оценить с помощью квадратурных компонент X и Y . Пусть среднее значение комплексной амплитуды z входного состояния $|z\rangle$ действительно: $\bar{z} = \bar{X}$. Используя операторы рождения (\hat{a}^+) и уничтожения (\hat{a}) фотона, введём квадратурные компоненты

$$\hat{X} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^+}{2}, \quad \hat{Y} = \frac{\hat{a} - \hat{a}^+}{i2}, \quad (3.9)$$

тогда дисперсия флуктуаций первой будет определять амплитудные флуктуации, а дисперсия флуктуаций второй — фазовые, причём, согласно принципу неопределённости Гейзенберга,

$$\langle\Delta\hat{X}^2\rangle\langle\Delta\hat{Y}^2\rangle \geq \frac{1}{16}. \quad (3.10)$$

По аналогии с (2.10) вводится и обобщённая квадратура:

$$\Delta\hat{Q}(\theta) = \frac{\Delta\hat{a} \exp(-i\theta) + \Delta\hat{a}^+ \exp(i\theta)}{2}, \quad (3.11)$$

с помощью которой нетрудно построить области неопределённости, представленные на рис. 10. С обсуждения этого рисунка мы начнём раздел 3.1, предварительно отметив, что вывод расчётных соотношений для построения этого рисунка дан в приложении 2.

3.1. Селекция квантовых флуктуаций и повышение точности одновременного измерения величин, связанных соотношением неопределённости Гейзенберга

Вариант светоделителя, для которого построены области неопределённости на рис. 10, интересен тем, что в одном из разделённых пучков (проходящем) подавляются флуктуации квадратуры X , т.е. амплитудные, а в другом, отражённом, — квадратуры Y . То есть амплитудные флуктуации идут преимущественно в один пучок, а фазовые — в другой. Таким образом, возможна

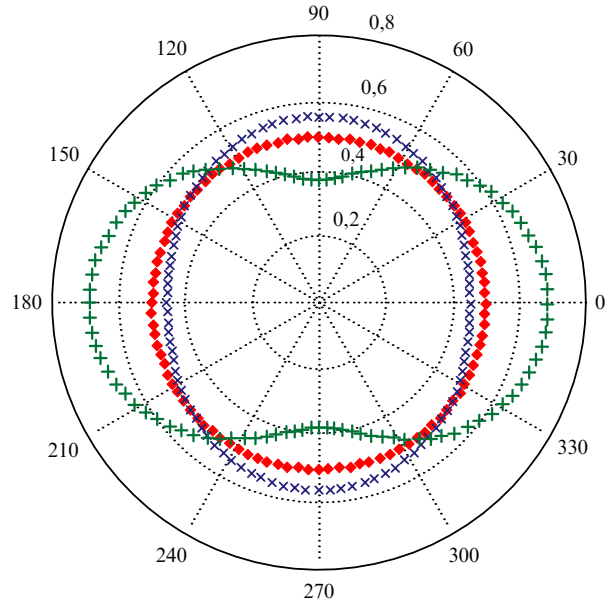


Рис. 10. Области неопределённости для проходящего (вытянутая по вертикали) и отражённого (вытянутая по горизонтали) пучков на комплексной плоскости. Для сравнения приведён круг, характерный для когерентного состояния. Нелинейна первая среда, угол падения $28,7^\circ$, $n_1 = 2,30 + 0,000285(\sqrt{m} + \sqrt{l})$, $n_2 = 1,30$. Среднее число отражённых фотонов 155, среднее число прошедших фотонов 95, среднее число входных фотонов 250.

селекция флуктуаций исходного пучка на амплитудные и фазовые: первые большей частью оказываются в отражённом пучке, а вторые — в прошедшем.

С другой стороны, для повышения точности измерений интересны пучки с подавленными флуктуациями. Итак, предположим, что нам нужно одновременно как можно точнее измерить квадратурные компоненты X и Y оптической монохроматической плоской моды поля. Направим её на наш светоделитель и измерим амплитудную компоненту X в прошедшем пучке, а фазовую компоненту Y — в отражённом. Точность измерений будет выше, чем в случае использования обычного линейного светоделителя. Но означает ли это, что нам удалось "обойти" принцип неопределённости Гейзенберга (3.10)? Конечно нет, ведь, измерив квадратуры на выходе светоделителя, нам нужно пересчитать их во входные, т.е. поделить на коэффициенты пропускания и отражения соответственно. Но последние меньше единицы, и ошибки измерения возрастают в соответствующее число раз. Тем не менее точность одновременных измерений X и Y всё же повысится.

3.2. Поиск оптимальной компоновки и каскад светоделителей

Ранее была показана принципиальная возможность приготовления субпуассоновского света, который может быть использован в сверхточных квантовых измерениях, поскольку в нём подавлены фотонные флуктуации, определяющие уровень дробового шума фотодетектирования. С целью оптимизации схемных решений и параметров светоделителей с точки зрения максимально эффективного подавления квантовых шумов рассмотрим всевозможные варианты компоновки нелинейных сред. Возможны три случая: первая среда нелинейна, а вторая линейна; первая среда линейна, а вторая нели-

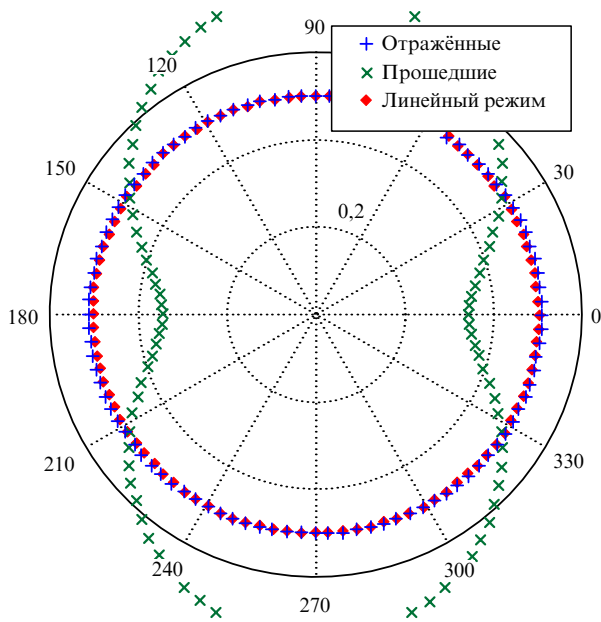


Рис. 11. Графики областей неопределённости для оптимального с точки зрения подавления фотонных флуктуаций варианта нелинейного светоделителя с одной (второй) нелинейной средой.

нейна; обе среды нелинейны. Критерием оптимизации является минимизация фактора Фано, который представляет собой отношение дисперсий интенсивности сформированного пучка к дисперсии когерентного света с пуассоновским распределением, т.е. к его среднему значению:

$$F = \frac{\langle \Delta \hat{n}^2 \rangle}{\langle \hat{n} \rangle}, \tag{3.12}$$

где $\hat{n} = \hat{a}^+ \hat{a}$ — оператор числа фотонов. Для субпуассоновского распределения $0 < F < 1$, и чем меньше фактор Фано, тем эффективнее подавление амплитудных флуктуаций.

Наилучший из наших результатов для одной нелинейной среды получен при следующих значениях исходных параметров: угол падения $\vartheta_1 = 88^\circ$, $\chi_2 = 0,0028$, $n_1 = n_{20} = 1,3$. При среднем числе входных фотонов когерентного состояния, равном 250, в прошедшем излучении амплитудные флуктуации подавляются более чем в два раза: $F \approx 0,47$. Результаты расчётов отражены на рис. 11.

Глядя на значения параметров такого светоделителя, разумно предположить, что если вместо первого линейного диэлектрика установить нелинейную самодефокусирующую среду с $\chi < 0$, то эффективность подавления фотонных флуктуаций будет ещё выше. Действительно, при $\chi_1 = -0,004$ и всех остальных параметрах таких же, как на рис. 11, фактор Фано снизится до $F \approx 0,44$. Ещё большего эффекта можно достичь при $\chi_1 = 10^{-5}$, $\chi_2 = 0,03$, $\vartheta_1 = 80,2^\circ$, $n_1 = n_{20} = 1,3$, а именно: $F \approx 0,38$.

Дальнейшая стабилизация проходящего пучка возможна при его последовательном прохождении через каскад нелинейных светоделителей, как изображено, например, на рис. 12.

Обозначим число выходных фотонов, прошедших через второй светоделитель, через k' . Тогда амплитуда вероятности того, что при m входных фотонах на выходе первого светоделителя будет ровно k прошедших и l

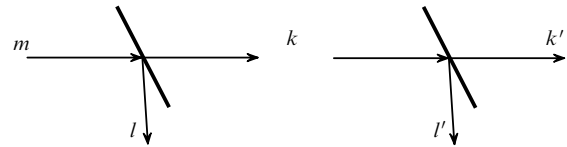


Рис. 12. Каскад из двух светоделителей.

отражённых фотонов, а на выходе второго — k' и l' фотонов:

$$A_{klk'l'} = D(m) A_{kl} A_{k'l'}, \tag{3.13}$$

где $A_{kl} = \sqrt{C_m^k} \tau^k \rho^l$, $A_{k'l'} = \sqrt{C_k^{k'}} \tau^{k'} \rho^{l'}$.

Вектор состояния, таким образом, выражается как

$$|\psi\rangle \propto \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \sum_{k'=0}^k A_{klk'l'} |k\rangle |l\rangle |k'\rangle |l'\rangle. \tag{3.14}$$

Вследствие нелинейности задачи приходится производить перенормировку, чтобы выполнялось соотношение $\langle \psi | \psi \rangle = 1$.

Очевидно, что вероятность получить ровно k' фотонов на выходе второго светоделителя теперь будет

$$P'(k') = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m \sum_{l'=0}^{k'} A_{klk'l'}^2. \tag{3.15}$$

Численные расчёты дали следующий результат (рис. 13). После второго прохождения через светоделитель пучок стал более стабильным. Значение фактора Фано после первого прохождения через светоделитель составило $F = 0,47$, после второго — $F = 0,40$. При этом среднее число фотонов в дважды прошедшем пучке уменьшилось в $\sim 2,7$ раза.

Отметим, что на диаграмме неопределённости для двух светоделителей и отражённый, и прошедший пучки имеют подавленные амплитудные флуктуации. Дело в том, что на вход второго светоделителя мы уже подаём свет в субпуассоновском состоянии.

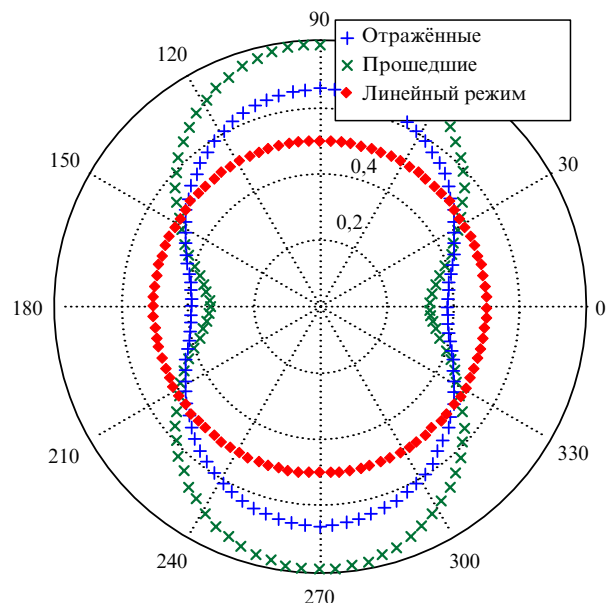


Рис. 13. Области неопределённости для каскада светоделителей.

4. Квазиклассическое описание

Вернёмся к нашему парадоксу. Первое, что приходит в голову при сопоставлении противоречивых классических и квантовых результатов, — это неучёт вакуума в первом случае. Действительно, на втором входе, сверху (см. рис. 7), — не пустота, а флуктуации с нулевым средним. В остальном распределение Вигнера вакуума такое же, как и для когерентного состояния: $W_{\text{vac}}(X, Y) = (2/\pi) \exp[-2(X^2 + Y^2)]$. Добавим к нашему численному эксперименту эту плоскую шумовую волну. Результаты представлены на рис. 14. Видно, что такое уточнение модели приближает нас к истине: фазовые флуктуации перестают быть инвариантными. Но это не является чем-то из ряда вон выходящим и присущим только нашему нелинейному светоделителю. Даже в линейном светоделителе когерентный свет излучателя остаётся когерентным на обоих выходах с неизменной областью неопределённости в виде круга с единичным диаметром именно за счёт вакуума на втором входе. В противном случае этот круг уменьшался бы вместе с уменьшением средней амплитуды выходных пучков. Однако если средняя амплитуда уменьшается, а область неопределённости остаётся неизменной, то, значит, увеличиваются фазовые флуктуации. Итак, их инвариантность удалось объяснить. Более того, распределения вероятностей интенсивностей в квантовом и квазиклассическом описаниях практически совпадают (рис. 14в).

Но как быть с дисперсией мнимой квадратуры? Не только из рис. 14, но и из чисто качественных классических соображений совершенно очевидно, что она должна быть неизменной, поскольку в нашем светоделителе

происходит преобразование исключительно амплитуды сигнала и связанной с ним действительной квадратуры. Дисперсия мнимой квадратуры лишь складывается с вакуумной, и она должна оставаться неизменной. В этом мы сейчас ещё раз убедимся на основании линеаризованного приближения. Итак, вопрос о неформальном объяснении парадокса нелинейного светоделителя остаётся открытым, поскольку принцип неопределённости Гейзенберга (3.10) по-прежнему нарушается.

5. Линеаризованное по флуктуациям приближение. Представление Гейзенберга

Для того чтобы нелинейная фазовая самомодуляция была эффективной, средняя амплитуда света должна быть достаточно велика. На её фоне флуктуационные составляющие незначительны, и их вполне корректно можно описывать, линеаризуя задачу вблизи средних значений. Итак, если $|\bar{z}|^2 \gg 1$, т.е. входная мода достаточно интенсивна, и среднее число фотонов в моде велико, то

$$|\bar{z}|^2 = \langle z|\hat{m}|z \rangle = \langle z|\hat{a}^+\hat{a}|z \rangle \gg \sqrt{\langle z|\Delta\hat{m}^2|z \rangle}, \tag{5.1}$$

где $\Delta\hat{m}^2 = \hat{a}^+\hat{a}\hat{a}^+\hat{a} - \langle z|\hat{m}|z \rangle^2$, и тогда приращение коэффициентов пропускания и отражения границы раздела можно линеаризовать по флуктуациям:

$$\tau \approx \langle \tau \rangle + \Delta k \frac{d\tau}{dk}, \quad \rho \approx \langle \rho \rangle + \Delta k \frac{d\rho}{dk}. \tag{5.2}$$

Здесь для простоты мы рассмотрим случай второй нелинейной среды, а под Δk будем понимать классиче-

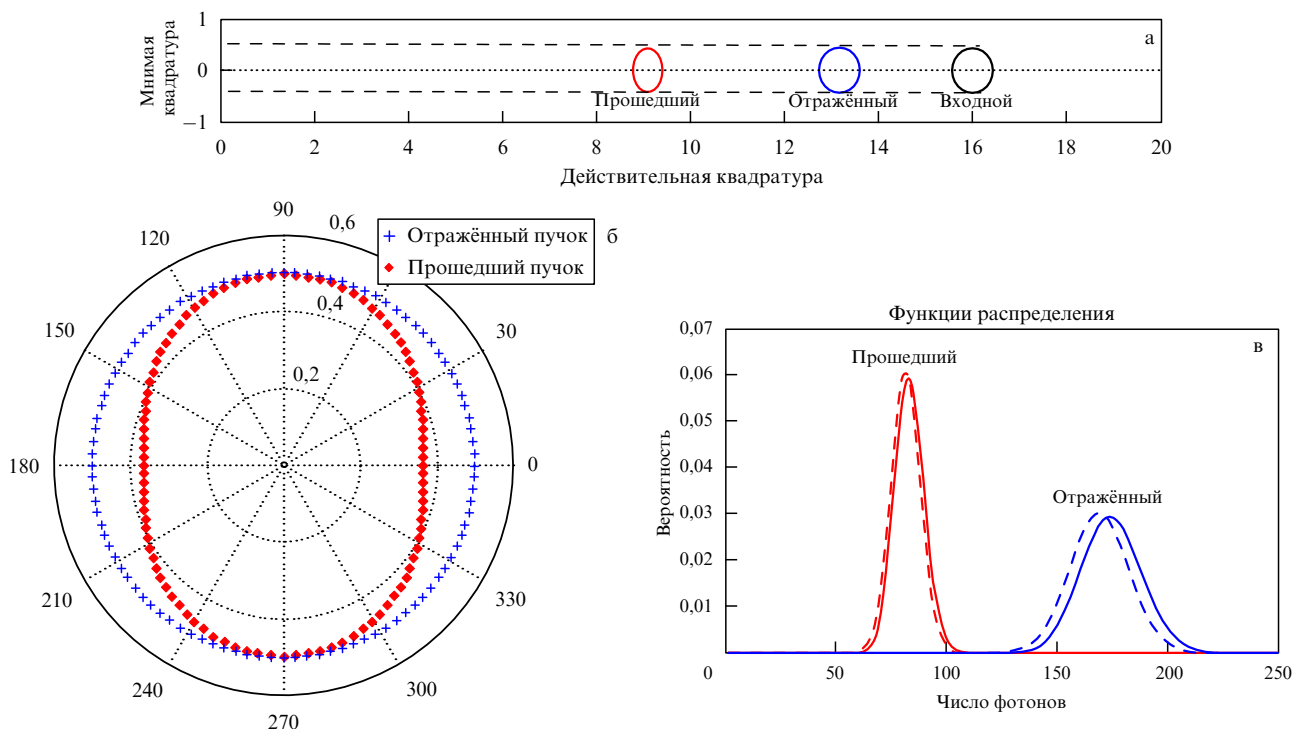


Рис. 14. Сечения функций распределений комплексных амплитуд (а) и области неопределённости (б) входного и выходных пучков с учётом флуктуаций вакуума (два входа). Видно, что флуктуации мнимой квадратуры инвариантны: они заключены не в растворе угла, как на рис. 3, а между двумя параллельными штриховыми прямыми на рис. а. Распределения вероятностей интенсивностей отражённого и прошедшего пучков (в) в квазиклассическом (сплошная кривая) и квантовом (штриховая кривая) случаях практически совпадают.

ский аналог оператора приращения числа фотонов $\Delta\hat{k}$, т.е. определённым образом пронормированное приращение интенсивности. Отметим, что одинаковость описания квантовой задачи в представлении Гейзенберга и в классическом приближении следует именно из-за линеаризации флуктуаций, при которой операторы не перемножаются друг на друга и их некоммутативность не сказывается.

Представим комплексную амплитуду моды прошедшего границу раздела излучения в виде

$$a = (\langle a \rangle + \Delta a) \exp(-i\Delta\Phi). \quad (5.3)$$

Здесь Δa и $\Delta\Phi$ представляют собой флуктуационные составляющие амплитуды и фазы. Фаза постоянной составляющей амплитуды взята равной нулю. При этом $\Delta a = \Delta X$.

С другой стороны, комплексную амплитуду a прошедшего излучения можно представить в виде

$$a = \tau a_1 + \rho a_v, \quad (5.4)$$

где a_1 — амплитуда моды входного пучка, a_v — амплитуда второй входной моды, поступающей на границу раздела сверху и имитирующей вакуумные флуктуации.

Приравняем правые части (5.3) и (5.4):

$$(\langle a \rangle + \Delta a) \exp(-i\Delta\Phi) = \tau a_1 + \rho a_v. \quad (5.5)$$

Представим τ в виде (5.2): $\tau \approx \langle \tau \rangle + \Delta k(d\tau/dk)$, a_1 — в виде $a_1 = \langle a_1 \rangle + \Delta a_1$ и подставим эти разложения в выражение (5.5):

$$(\langle a \rangle + \Delta a) \exp(-i\Delta\Phi) = \left(\langle \tau \rangle + \Delta k \frac{d\tau}{dk} \right) (\langle a_1 \rangle + \Delta a_1) + \rho a_v. \quad (5.6)$$

Здесь Δa_1 и a_v — комплексные, все остальные величины — действительные.

Учитывая малость флуктуаций, $\exp(-i\Delta\Phi) \approx 1 - i\Delta\Phi$, находим

$$(\langle a \rangle + \Delta a)(1 - i\Delta\Phi) = \left(\langle \tau \rangle + \Delta k \frac{d\tau}{dk} \right) (\langle a_1 \rangle + \Delta a_1) + \rho a_v, \quad (5.7)$$

$$(\langle a \rangle + \Delta a)(1 + i\Delta\Phi) = \left(\langle \tau \rangle + \Delta k \frac{d\tau}{dk} \right) (\langle a_1 \rangle + \Delta a_1^*) + \rho a_v^*. \quad (5.8)$$

Соотношения (5.7) и (5.8) являются комплексно сопряжёнными.

В силу линейности задачи по флуктуациям заменим в выражениях (5.7), (5.8) комплексные амплитуды флуктуационных составляющих соответствующими операторами рождения и уничтожения фотона и сложим (5.7) и (5.8):

$$2(\langle \hat{a} \rangle + \Delta \hat{a}) = \left(\langle \tau \rangle + \Delta k \frac{d\tau}{dk} \right) (2\langle \hat{a}_1 \rangle + \Delta \hat{a}_1 + \Delta \hat{a}_1^+) + \langle \rho \rangle (\hat{a}_v + \hat{a}_v^+). \quad (5.9)$$

Учитывая, что

$$\langle \hat{a} \rangle = \langle \tau \rangle \langle \hat{a}_1 \rangle, \quad (5.10)$$

получим

$$2(\langle \tau \rangle \langle \hat{a}_1 \rangle + \Delta \hat{a}) = \left(\langle \tau \rangle + \Delta k \frac{d\tau}{dk} \right) (2\langle \hat{a}_1 \rangle + \Delta \hat{a}_1 + \Delta \hat{a}_1^+) + \langle \rho \rangle (\hat{a}_v + \hat{a}_v^+). \quad (5.11)$$

Теперь легко найти $2\Delta \hat{a}$:

$$2\Delta \hat{a} = \left(\langle \tau \rangle + \Delta k \frac{d\tau}{dk} \right) (2\langle \hat{a}_1 \rangle + \Delta \hat{a}_1 + \Delta \hat{a}_1^+) + \langle \rho \rangle (\hat{a}_v + \hat{a}_v^+) - 2\langle \tau \rangle \langle \hat{a}_1 \rangle = \langle \tau \rangle (\Delta \hat{a}_1 + \Delta \hat{a}_1^+) + \Delta k \frac{d\tau}{dk} \times (2\langle \hat{a}_1 \rangle + \Delta \hat{a}_1 + \Delta \hat{a}_1^+) + \langle \rho \rangle (\hat{a}_v + \hat{a}_v^+). \quad (5.12)$$

Поскольку фаза постоянной составляющей $\langle \hat{a} \rangle$ равна нулю, имеем

$$\Delta \hat{k} \approx 2\langle \hat{a} \rangle \Delta \hat{a}, \quad (5.13)$$

тогда

$$2\Delta \hat{a} = \langle \tau \rangle (\Delta \hat{a}_1 + \Delta \hat{a}_1^+) + 2\langle \hat{a} \rangle \Delta \hat{a} \frac{d\tau}{dk} \times (2\langle \hat{a}_1 \rangle + \Delta \hat{a}_1 + \Delta \hat{a}_1^+) + \langle \rho \rangle (\hat{a}_v + \hat{a}_v^+). \quad (5.14)$$

Пренебрежём квадратичными по флуктуациям слагаемыми:

$$2\Delta \hat{a} = \langle \tau \rangle (\Delta \hat{a}_1 + \Delta \hat{a}_1^+) + 4\langle \hat{a} \rangle \Delta \hat{a} \frac{d\tau}{dk} \langle \hat{a}_1 \rangle + \langle \rho \rangle (\hat{a}_v + \hat{a}_v^+), \quad (5.15)$$

отсюда

$$\Delta \hat{a} = \frac{\langle \tau \rangle (\Delta \hat{a}_1 + \Delta \hat{a}_1^+) + \langle \rho \rangle (\hat{a}_v + \hat{a}_v^+)}{2(1 - 2\langle \hat{a} \rangle (d\tau/dk) \langle \hat{a}_1 \rangle)}. \quad (5.16)$$

Представим теперь производные в выражениях (5.2) и (5.16) следующим образом:

$$\frac{d\tau}{dk} = \frac{d\tau}{dn_2} \frac{dn_2}{dk} = \chi \frac{d\tau}{dn_2}, \quad \frac{d\rho}{dk} = \frac{d\rho}{dn_2} \frac{dn_2}{dk} = \chi \frac{d\rho}{dn_2}, \quad (5.17)$$

где коэффициент χ , как и ранее, пропорционален кубической нелинейности $\chi^{(3)}$ второго диэлектрика. Тогда, учитывая (5.10), получим

$$\Delta \hat{a} = \frac{\langle \tau \rangle (\Delta \hat{a}_1 + \Delta \hat{a}_1^+) + \langle \rho \rangle (\hat{a}_v + \hat{a}_v^+)}{2} \left(1 - 2\chi \frac{\langle \hat{k} \rangle}{\langle \tau \rangle} \frac{d\tau}{dn_2} \right)^{-1}. \quad (5.18)$$

Полагая амплитудный коэффициент пропускания действительным, в соответствии с законом сохранения энергии находим

$$\tau^2 = 1 - \rho^2 = \frac{\sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2) - \sin^2(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} = \frac{\sin(2\vartheta_1) \sin(2\vartheta_2)}{\sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)}. \quad (5.19)$$

Поскольку

$$\tau d\tau = -\rho d\rho, \quad (5.20)$$

запишем

$$\frac{d\tau}{\tau} = -\frac{\rho}{\tau^2} d\rho = -\frac{\sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\sin(2\vartheta_1) \sin(2\vartheta_2)} \rho d\rho. \quad (5.21)$$

Согласно закону преломления (2.1)

$$\frac{d\vartheta_2}{dn_2} = -\frac{\sin \vartheta_2}{n_2 \cos \vartheta_2}. \quad (5.22)$$

Теперь найдём

$$\frac{d\rho}{dn_2} = \frac{d\rho}{d\vartheta_2} \frac{d\vartheta_2}{dn_2}. \quad (5.23)$$

Поскольку в соответствии с (2.2)

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\vartheta_2} &= \frac{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} = \\ &= \frac{\sin(2\vartheta_1)}{\sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dn_2} &= \frac{d\rho}{d\vartheta_2} \frac{d\vartheta_2}{dn_2} = -\frac{\sin(2\vartheta_1)}{\sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \frac{\sin \vartheta_2}{n_2 \cos \vartheta_2} = \\ &= -\frac{\sin \vartheta_2 \sin(2\vartheta_1)}{n_2 \cos \vartheta_2 \sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

следовательно, с учётом (5.19)

$$\begin{aligned} \frac{2}{\tau} \frac{d\rho}{dn_2} &= -\frac{2 \sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\sin(2\vartheta_1) \sin(2\vartheta_2)} \frac{\sin \vartheta_2 \sin(2\vartheta_1)}{n_2 \cos \vartheta_2 \sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} = \\ &= -\frac{1}{n_2 \cos^2 \vartheta_2}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Теперь, используя известное выражение для ρ (2.2), можем записать

$$\begin{aligned} \frac{2}{\tau} \frac{d\tau}{dn_2} &= \frac{2}{\tau} \frac{d\tau}{d\rho} \frac{d\rho}{dn_2} = -\rho \frac{2}{\tau^2} \frac{d\rho}{dn_2} = \\ &= \frac{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left(-\frac{1}{n_2 \cos^2 \vartheta_2} \right) = -\frac{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{n_2 \cos^2 \vartheta_2 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Подставим результат (5.27) в формулу (5.18):

$$\Delta \hat{a} = \frac{1}{2} G [\langle \tau \rangle (\Delta \hat{a}_1 + \Delta \hat{a}_1^+) + \langle \rho \rangle (\hat{a}_v + \hat{a}_v^+)], \quad (5.28)$$

где

$$G = \left[1 + \frac{2\chi \langle \hat{k} \rangle \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{n_2 \cos^2 \vartheta_2 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \right]^{-1}. \quad (5.29)$$

Поскольку $\Delta \hat{a} = \Delta \hat{X}$, дисперсия действительной квадратуры

$$\langle \Delta \hat{X}^2 \rangle = 4 \left[1 + \frac{2\chi \langle \hat{k} \rangle \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{n_2 \cos^2 \vartheta_2 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \right]^{-2} = \frac{G^2}{4}. \quad (5.30)$$

Проведём аналогичные преобразования, вычитая из уравнения (5.8) комплексно сопряжённое уравнение (5.7):

$$\begin{aligned} 2i\Delta \hat{\Phi}(\langle \hat{a} \rangle + \Delta \hat{a}) &= \left(\langle \tau \rangle + \Delta \hat{k} \frac{d\tau}{d\hat{k}} \right) (\Delta \hat{a}_1^+ - \Delta \hat{a}_1) + \\ &+ \langle \rho \rangle (\hat{a}_v - \hat{a}_v^+). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Пренебрежём квадратичными по флуктуациям слагаемыми:

$$2i\Delta \hat{\Phi}(\langle \hat{a} \rangle) = \langle \tau \rangle (\Delta \hat{a}_1^+ - \Delta \hat{a}_1) + \langle \rho \rangle (\hat{a}_v - \hat{a}_v^+). \quad (5.32)$$

Так как $\Delta \hat{\Phi}(\langle \hat{a} \rangle) = \Delta \hat{Y}$, окончательно получим

$$\langle \Delta \hat{Y} \rangle^2 = \frac{1}{4}. \quad (5.33)$$

Итак, дисперсия флуктуаций мнимой квадратуры действительно остаётся неизменной при проходе нелинейного светоделителя, что мы уже констатировали выше исходя из общих соображений, и принцип неопределённости для квадратурных компонент (3.10) нарушается. В чём же дело?

При выводе соотношений для $\Delta \hat{X}$ и $\Delta \hat{Y}$ мы не проверили коммутационное соотношение

$$[\Delta \hat{a}, \Delta \hat{a}^+] = \hat{I}, \quad (5.34)$$

где \hat{I} — единичный оператор, а оно не выполняется вследствие нелинейности задачи. Введём перенормировку с помощью постоянного коэффициента C и выпишем выражение внутри коммутатора:

$$\begin{aligned} C[\Delta \hat{a}, \Delta \hat{a}^+] &= C(\Delta \hat{a} \Delta \hat{a}^+ - \Delta \hat{a}^+ \Delta \hat{a}) = \\ &= C(\Delta \hat{X}^2 + \Delta \hat{Y}^2 + i\Delta \hat{Y} \Delta \hat{X} - i\Delta \hat{X} \Delta \hat{Y} - \Delta \hat{X}^2 - \Delta \hat{Y}^2 + \\ &+ i\Delta \hat{Y} \Delta \hat{X} - i\Delta \hat{X} \Delta \hat{Y}) = 2iC(\Delta \hat{Y} \Delta \hat{X} - \Delta \hat{X} \Delta \hat{Y}) = \hat{I}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Поскольку без перенормировки

$$\begin{aligned} \Delta \hat{Y} \Delta \hat{X} - \Delta \hat{X} \Delta \hat{Y} &= \frac{\hat{G}}{2i} [\langle \tau \rangle^2 \Delta \hat{a}_1^+ \Delta \hat{a}_1 - \langle \tau \rangle^2 + \langle \rho \rangle^2 \hat{a}_v^+ \hat{a}_v - \langle \rho \rangle^2 + \\ &+ \langle \tau \rangle \langle \rho \rangle (\Delta \hat{a}_1^+ \hat{a}_v - \hat{a}_v \Delta \hat{a}_1^+ + \hat{a}_v^+ \Delta \hat{a}_1 - \hat{a}_v \Delta \hat{a}_1^+)] = -\frac{\hat{G}\hat{I}}{2i}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

получим

$$C = -\frac{1}{G} = -\left[1 + \frac{2\chi \langle \hat{k} \rangle \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{n_2 \cos^2 \vartheta_2 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \right]. \quad (5.37)$$

И вот теперь всё получается хорошо (рис. 15), по крайней мере с качественной точки зрения. Небольшие количественные расхождения с точным квантовым решением, по-видимому, объясняются тем, что мы использовали линеаризованное приближение. Легко показать, что текущий радиус тела флуктуационной неопределённости в полярной системе координат выражается как

$$R(\theta) = \sqrt{\frac{G}{4} \cos^2 \theta + \frac{1}{4G} \sin^2 \theta}. \quad (5.38)$$

Устранено, наконец, противоречие с принципом неопределённости Гейзенберга. Действительно, в прохо-

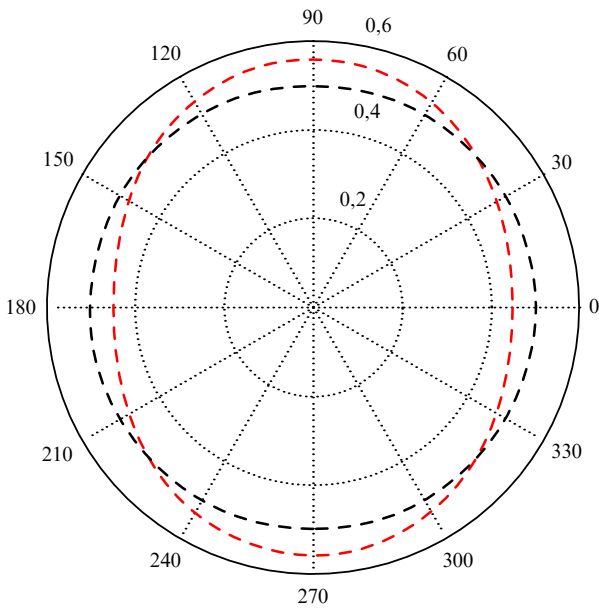


Рис. 15. Тело флуктуационной неопределённости проходящего излучения после перенормировки. Для сравнения показан круг, характерный для когерентного состояния.

дующем пучке возросли фазовые флуктуации и уменьшились амплитудные. Ключевым моментом при этом была перенормировка квадратур, чтобы не нарушался коммутатор $[\Delta\hat{a}, \Delta\hat{a}^+] = \hat{I}$, который не может быть другим в силу *неделимости фотона*. Именно этот фактор приводит к "раскачиванию" фазы и флуктуаций мнимой квадратуры $\Delta\hat{Y}$ без видимой на то причины, и именно он лежит в основе возникающего парадокса.

Отметим также, что мы не случайно написали выражения (5.2) и (5.17) как для коэффициента пропускания, так и для коэффициента отражения. Дело в том, что аналогичными преобразованиями можно описать и поле отражённого пучка. Результат будет отличаться лишь количественно. Основные принципиальные выводы останутся теми же.

6. Заключение

В данной статье представлена квантовая теория преобразования бозонных полей нелинейным светоделителем, являющимся плоской границей раздела двух прозрачных сред, одна из которых или обе обладают кубической керровской нелинейностью: показатель преломления зависит от интенсивности пронизывающего их излучения. Соответствующим выбором параметров граничащих сред можно добиться стабилизации интенсивности проходящего или отражённого пучков, причём не только классических, но и квантовых полей, что даёт возможность повысить информативность оптических устройств, в которых свет используется в качестве носителя информации. При сопоставлении с классическим подходом выяснилось, что последний даёт противоречащее квантовой теории предсказание относительно поведения фазовых флуктуаций. Этот интересный с фундаментальной точки зрения результат лёг в основу квантового парадокса нелинейного светоделителя.

Вернёмся к формулировке этого парадокса и проследим пути его разрешения. В нелинейном светоделителе

происходит стабилизация амплитудных флуктуаций как в классическом, так и в квантовом описаниях. Это выражается, в частности, в подавлении флуктуаций квадратурной компоненты X , направленной вдоль вектора средней действительной амплитуды на комплексной плоскости. При этом дисперсия второй, направленной вдоль чисто мнимой оси, квадратуры Y , отвечающей за фазовые флуктуации, остаётся инвариантной в классическом описании даже с учётом вакуумных флуктуаций. Действительно, нет никаких физических модельных причин, приводящих к её изменению. Но при этом нарушается принцип неопределённости Гейзенберга. Только квантовая теория предсказывает увеличение дисперсии флуктуаций квадратурной компоненты Y . За счёт чего? Ответ даёт линеаризованная квантовая теория в представлении Гейзенберга, наиболее близкая к классическому описанию. Непосредственное решение нарушает коммутационное соотношение $[\Delta\hat{a}, \Delta\hat{a}^+] \neq \hat{I}$ в силу нелинейности задачи. Но может ли нарушаться коммутационное соотношение $[\Delta\hat{a}, \Delta\hat{a}^+] = \hat{I}$? Если фотоны неделимы, то это соотношение нарушаться не может. Восстановить коммутационное соотношение можно перенормировкой операторов рождения и уничтожения, тогда дисперсия по Y увеличивается, а принцип неопределённости, разумеется, выполняется.

Итак, фундаментальной причиной парадокса является неделимость фотона.

Кроме того, мы приходим и к практически важному выводу о возможности селекции фотонных флуктуаций: амплитудные флуктуации отфильтровываются либо в проходящий пучок, либо в отражённый, в зависимости от компоновки граничащих сред, а фазовые — в отражённый либо в прошедший соответственно. Итак, мы можем разделить амплитудные и фазовые флуктуации сигнала, направив первые в один канал, а вторые — в другой. Это весьма привлекательно для систем оптической передачи и обработки информации, а также борьбы с шумами, например, в системах связи. При классическом описании такого рода нелинейная фильтрация оказывается ущербной, поскольку она распространяется только на амплитудные флуктуации, а фазовые остаются неизменными. Тем не менее и в последнем случае возможны схемные решения, приводящие к выделению полезного амплитудно-модулированного сигнала на фоне постоянной шумовой составляющей.

И ещё один важный практический вывод, относящийся уже к теоретическому описанию нелинейных квантовых систем. Совершенно очевидно, что линейную квантовую модель можно описывать классически, например, с помощью комплексных амплитуд, и лишь в итоговом выражении заменить их соответствующими операторами в представлении Гейзенберга. Затем провести усреднения и пр. Это существенное упрощение адекватно потому, что в линейной задаче операторы не перемножаются ни друг на друга, ни сами на себя, следовательно, их некоммутативность никак не сказывается на результате. Примером тут может служить обычный линейный светоделитель без потерь. А как быть с линеаризованным по флуктуациям приближением? Казалось бы, всё то же самое. Переменные входят в описание линейно и не перемножаются ни друг на друга, ни сами на себя. Действительно, в многолучевом интерферометре с керровской нелинейностью [13, 29–32] квантовое и классические описания флуктуаций иден-

тичны в пределах адекватности линеаризации. Но там не нарушался коммутатор $[\Delta\hat{a}, \Delta\hat{a}^+] = \hat{I}$! Однако на примере нелинейного светоделителя мы убедились, что это бывает не всегда. Таким образом, нужно быть крайне осторожным, описывая даже линеаризованные по малым флуктуациям квантовые системы, и не торопиться использовать при этом наглядные модельные классические результаты.

Исследован также и практический аспект обсуждаемого явления: рассмотрены всевозможные комбинации компоновки линейной и нелинейной сред с точки зрения максимально возможного подавления фотонных флуктуаций и соответствующего преодоления квантового предела информативной ёмкости оптических устройств. Точная квантовая теория дала оценки, согласно которым возможно более чем двукратное подавление дисперсии фотонного шума по сравнению с таковым для когерентного состояния.

В заключение отметим, что Я.А. Фофанову удалось экспериментально получить субпуассоновское распределение фотоотсчётов с помощью нелинейного светоделителя. Зафиксирована дисперсия амплитудных флуктуаций фототока, меньшая дисперсии амплитудных флуктуаций пуассоновского распределения примерно на 1% [33, 34].

Авторы благодарны А.С. Чиркину за полезные обсуждения и конструктивную критику. Работа поддержана грантом РФФИ № 13-07-00938а.

7. Приложение 1

В формуле (3.3) фигурируют два типа сомножителей. Первый из них (D_m) представляет собой коэффициент пуассоновского разложения входного когерентного состояния по фоковским $|m\rangle$:

$$D_m^2 = \exp(-\bar{m}) \frac{|\bar{m}|^m}{m!},$$

где \bar{m} — среднее число фотонов. При $\bar{m} > 20$ можно использовать для D_m^2 с хорошей точностью гауссово приближение:

$$D_m^2 \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{m}}} \exp\left[-\frac{(m - \bar{m})^2}{2\bar{m}}\right].$$

Второй тип сомножителя, биномиальный член вида $A_{kl} = \sqrt{C_m^k} \tau^k \rho^l$, определяет вероятность прохождения k фотонов и отражения $l = m - k$ фотонов при фиксированном числе входных фотонов m . Эта вероятность равна A_{kl}^2 . Если выполняются условия $\bar{m} > 100$ и $\bar{m}\tau^2\rho^2 > 20$, то на основании теоремы Муавра–Лапласа с хорошей точностью можно использовать для A_{kl}^2 приближение

$$A_{kl}^2 \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2 m(1 - \tau^2 m)}} \exp\left[-\frac{(k - \tau^2 m)^2}{2\tau^2 m(1 - \tau^2 m)}\right].$$

Суммирование в (3.3) до бесконечности по m в случае когерентного состояния на входе практически можно вести до верхнего предела $\bar{m} + 5\sqrt{\bar{m}}$, поскольку слагаемые, отстоящие от среднего значения более чем на пять среднеквадратических отклонений, пренебрежимо малы.

8. Приложение 2

Выведем соотношения, определяющие дисперсию флуктуаций квадратурных компонент прошедшего и отражённого пучков.

Вначале найдём среднюю обобщённую квадратуру отражённого пучка:

$$\begin{aligned} 2\langle\psi|\hat{Q}(\theta)|\psi\rangle &= \langle\psi|\hat{a}|\psi\rangle \exp(-i\theta) + \langle\psi|\hat{a}^+|\psi\rangle \exp(i\theta) = \\ &= \exp(-i\theta) \sum_{k,l} \langle k|l\rangle A_{kl} \sum_{k'l'} A_{k'l'} \sqrt{l'} |l' - 1\rangle |k'\rangle + \\ &+ \exp(i\theta) \sum_{k,l} \langle k|l\rangle A_{kl} \sum_{k'l'} A_{k'l'} \sqrt{l'+1} |l' + 1\rangle |k'\rangle = \\ &= \exp(-i\theta) \sum_{kl} A_{kl} A_{kl+1} \sqrt{l+1} + \text{c.c.}, \end{aligned}$$

где с.с. — комплексно сопряжённые члены. Отсюда

$$\langle\psi|\hat{Q}(\theta)|\psi\rangle = \cos\theta \sum_{kl} A_{kl} A_{kl+1} \sqrt{l+1}.$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} 4\langle\psi|\hat{Q}^2(\theta)|\psi\rangle &= \langle\psi|\hat{a}\hat{a}|\psi\rangle \exp(-i2\theta) + \\ &+ \langle\psi|\hat{a}^+\hat{a}^+|\psi\rangle \exp(i2\theta) + 2\langle\psi|\hat{a}^+\hat{a}|\psi\rangle + 1 = \\ &= \exp(-i2\theta) \sum_{k,l} \langle k|l\rangle A_{kl} \times \\ &\times \sum_{k'l'} A_{k'l'} \sqrt{l'(l'-1)} |l' - 2\rangle |k'\rangle + \text{c.c.} + 2 \sum_{k,l} l A_{kl}^2 + 1 = \\ &= 2 \cos(2\theta) \sum_{kl} A_{kl} A_{kl+2} \sqrt{(l+1)(l+2)} + 2 \sum_{k,l} l A_{kl}^2 + 1. \end{aligned}$$

Таким образом, дисперсия квадратуры

$$\langle\psi|\Delta\hat{Q}^2(\theta)|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{Q}^2(\theta)|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{Q}(\theta)|\psi\rangle^2$$

вычисляется соответствующей подстановкой.

Для проходящего пучка k и l следует поменять местами.

Список литературы

1. Einstein A, Podolsky B, Rosen N *Phys. Rev.* **47** 777 (1935)
2. Bohr N *Phys. Rev.* **48** 696 (1935)
3. Фок В А, Эйнштейн А, Подольский Б, Розен Н, Бор Н *УФН* **16** 436 (1936)
4. Bell J S *Physics* **1** 195 (1964)
5. Белинский А В, Клышко Д Н *УФН* **163** (8) 1 (1993); Belinskii A V, Klyshko D N *Phys. Usp.* **36** 653 (1993)
6. Белинский А В *УФН* **167** 323 (1997); Belinskii A V *Phys. Usp.* **40** 305 (1997)
7. Клышко Д Н *УФН* **154** 133 (1988); Klyshko D N *Sov. Phys. Usp.* **31** 74 (1988)
8. Клышко Д Н *УФН* **158** 327 (1989); Klyshko D N *Sov. Phys. Usp.* **32** 555 (1989)
9. Кадомцев Б Б *УФН* **164** 449 (1994); Kadomtsev B B *Phys. Usp.* **37** 425 (1994)
10. Кадомцев Б Б *Динамика и информация* 2-е изд. (М.: Редакция журнала "Успехи физических наук", 1999)
11. Кадомцев Б Б *УФН* **173** 1221 (2003); Kadomtsev B B *Phys. Usp.* **46** 1183 (2003)
12. Белинский А В *УФН* **173** 905 (2003); Belinskii A V *Phys. Usp.* **46** 877 (2003)

13. Белинский А В *Квантовые измерения* (М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012)
14. Белинский А В *Метафизика* (2) 72 (2011)
15. Belinsky A V, Klyshko D N *Laser Phys.* **6** 1082 (1996)
16. Belinsky A V, Klyshko D N *Laser Phys.* **2** 112 (1992)
17. Белинский А В *Письма в ЖЭТФ* **54** 13 (1991); Belinskii A V *JETP Lett.* **54** 11 (1991)
18. Менский М Б *УФН* **168** 1017 (1998); Menskii M B *Phys. Usp.* **41** 923 (1998)
19. Менский М Б *УФН* **181** 543 (2011); Mensky M B *Phys. Usp.* **54** 519 (2011)
20. Mensky M B *Quantum Measurements and Decoherence. Models and Phenomenology* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000); Менский М Б *Квантовые измерения и декогеренция. Модели и феноменология* (М.: Физматлит, 2001)
21. Белинский А В, Клышко Д Н *ЖЭТФ* **102** 1116 (1992); Belinskii A V, Klyshko D N *Sov. Phys. JETP* **75** 606 (1992)
22. Белинский А В, Чиркин А С *УФН* **183** 1231 (2013); Belinsky A V, Chirkin A S *Phys. Usp.* **56** 1126 (2013)
23. Белинский А В *Письма в ЖЭТФ* **51** 341 (1990); Belinskii A V *JETP Lett.* **51** 387 (1990)
24. Белинский А В *Квантовая электроника*. **18** 84 (1991); Belinskii A V *Sov. J. Quantum Electron.* **21** 75 (1991)
25. Белинский А В, Грановский А А *Письма в ЖЭТФ* **93** 552 (2011); Belinskii A V, Granovskii A A *JETP Lett.* **93** 495 (2011)
26. Белинский А В, Волков Д В, Дмитриев А В, Шульман М Х *ЖЭТФ* **144** 891 (2013); Belinsky A V, Volkov D V, Dmitriev A V, Shulman M Kh *JETP* **117** 771 (2013)
27. Born M, Wolf E *Principles of Optics* (Oxford: Pergamon Press, 1969); Борн М, Вольф Э *Основы оптики* (М.: Наука, 1970)
28. Leonhardt U *Measuring the Quantum State of Light* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997)
29. Reynaud S, Giacobino E J. *Physique* **49** C2-477 (1988)
30. Белинский А В, Чиркин А С *Оптика и спектроскопия* **67** 1226 (1989); Belinskii A V, Chirkin A S *Opt. Spectrosc.* **67** 723 (1989)
31. Белинский А В, Розанов Н Н *Оптика и спектроскопия* **73** 153 (1992); Belinskii A V, Rozanov N N *Opt. Spectrosc.* **73** 89 (1992)
32. Belinskii A V, Rosanov N N *Proc. SPIE* **1840** 291 (1991)
33. Фофанов Я А *Оптика и спектроскопия* **94** 861 (2003); Fofanov Ya A *Opt. Spectrosc.* **94** 802 (2003)
34. Fofanov Ya A *Proc. SPIE* **7993** 799300 (2011)

Quantum nature of a nonlinear beam splitter

A.V. Belinsky, M.Kh. Shulman

Physics Department, Lomonosov Moscow State University,
Leninskie gory 1, str. 2, 119991 Moscow, Russian Federation
E-mail: belinsky@inbox.ru, shulman@dol.ru

This is a review of a very interesting (in the authors' view) phenomenon, the operation of the light beam splitter. The beam splitter is a flat interface between two transparent dielectrics, at least one of which exhibits Kerr nonlinearity, i.e., its refractive index depends on the transmitted radiation intensity. Interestingly, quantum and classical theories make directly opposite predictions about the phase fluctuation of the output radiation of this device. In classical theory, the phases remain unchanged; in quantum theory, the phases fluctuate in accord with the amplitude-phase uncertainty relation. The origin of this difference is established at the fundamental level. A further remarkable point about this quantum paradox is that not only the source beam is split in two but one can also create conditions where the two split parts are respectively dominated by amplitude noise and phase noise, thus allowing the selection of photon fluctuations. Results of original studies are summarized and further developed.

PACS numbers: **03.65** – w, **03.65**.Sq, **42.65** – k

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201410i.1135

Bibliography — 34 references

Received 6 March 2014

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (10) 1135–1148 (2014)

Physics – Uspekhi **57** (10) (2014)