

КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОРЕНЦА И СВЕРХСВЕТОВОЙ ФЕНОМЕН

Цзы-Янг Вонг, Кэй-Донг Ксионг (КНР)

Перевод М.Х. Шульмана

<http://lanl.arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0705/0705.2951.pdf>

Quantum-mechanical Lorentz transformation and superluminal phenomenon

Zhi-Yong Wang, Cai-Dong Xiong

*School of Physical Electronics, University of Electronic Science and Technology of China,
Chengdu 610054, CHINA*

В этой заметке исследуется квантово-механическое преобразование Лоренца, связывающее классическую и квантовую системы отсчета. Показывается, что частица может преодолевать пространственно-подобный интервал, это обусловлено соотношением неопределенности Гейзенберга и согласуется с квантовой теорией поля. Более того, в квантовой системе отсчета пространственно-временные координаты не коммутируют между собой, а время выступает как оператор.

PACS индекс(ы): 03.65.Xp, 03.30.+p, 41.20.Jb

Согласно специальной теории относительности (СТО), частица не может преодолеть пространственно-подобный интервал. В результате, вопреки возможности сверхсветового эффекта в квантовой теории поля [1-4], существует множество разногласий по поводу подобного сверхсветового перемещения. Например, хотя и теоретические, и экспериментальные исследования привели к согласованному выводу, что фотоны внутри малого волновода распространяются со сверхсветовой скоростью [5-11], этот вывод оспаривается во многих недавно

опубликованных работах [12-18]. Традиционно СТО развивалась на базе классической механики без какого-либо учета квантово-механических (КМ) эффектов, а это означает, что некоторые стандартные положения СТО должны быть пересмотрены в связи с невозможностью игнорировать КМ-эффекты. В частности, сверхсветовое поведение частиц может быть объяснено на основе переформулирования СТО с использованием КМ взамен классической механики.

На самом деле можно объединить СТО и КМ двумя способами: (1) путем развития КМ на базе СТО, при этом возникает релятивистская КМ и квантовая теория поля; (2) путем развития СТО на базе КМ и построения квантово-механической СТО. Первый подход был успешно реализован, тогда как второй еще только разрабатывается. В действительности было предпринято много попыток выяснить, как квантовые эффекты могли бы изменить СТО (например, попытки применить КМ-неопределенность к релятивистской системе отсчета; попытки расширить концепцию макроскопических наблюдателей, чтобы включить туда представление о КМ-наблюдателях, и т.д.) [19-21], была исследована квантовая система отсчета, определенная материальным объектом по законам КМ [22-26]. Однако эти усилия не были вполне успешными. Например, в работе [22] обсуждалась квантовая система отсчета в рамках нерелятивистской КМ, т.е. в рамках галилеевой (а не эйнштейновской) относительности.

Правильная квантово-механическая версия СТО должна давать нам те же самые результаты, что и релятивистская КМ (как, например, квантовая теория поля). В рамках этой нашей задачи мы изучили преобразование Лоренца, связывающее классическую и квантовую системы отсчета, при этом удалось прийти к тому же заключению, что и в квантовой теории поля: частица может преодолевать пространственно-подобный интервал.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета S и S' , одна из которых движется относительно другой со скоростью $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$. Мы будем обозначать наблюдаемые переменные без использования штриха, когда речь идет о системе S , и со штрихом, если речь идет о системе S' . При этом время и пространственные координаты точки соответственно получают обозначения (t, x, y, z) и (t', x', y', z') . Координатные оси обеих систем параллельны и ориентированы таким образом, что система S' движется в положительном направлении вдоль оси x со скоростью $v > 0$ с точки зрения наблюдателя, связанного с S . Положим также, что начала координат в

S и S' при $t = t' = 0$ совпадают. Все утверждения, которые здесь приводятся, соответствуют классической механике, иными словами – они справедливы для квантово-механических средних значений.

С физической точки зрения система отсчета определяется материальным объектом той же природы, что и объекты, образующие систему, наблюдаемые и измеряемые с помощью приборов [23]. Если масса материального объекта конечна, то соответствующая система отсчета (скажем, квантовая система отсчета), видимо, должна подчиняться законам квантовой механики, при этом взаимодействие между объектом и измерительным устройством может не быть пренебрежимо малым. В частности, соотношение неопределенности Гейзенберга запрещает точное [одновременное – Примеч. пер.] определение относительного положения и скорости квантовой системы отсчета. Для простоты мы предположим, что взаимодействие между физической системой и измерительным устройством так мало, что все квантовые системы отсчета приближенно могут рассматриваться в качестве инерциальных (они инерциальны для квантово-механических средних).

Чтобы выяснить, может ли частица преодолевать пространственно-подобные интервалы, мы предположим, что система отсчета S' связана с частицей Q , имеющей массу покоя m (т.е. с квантово-механическим объектом конечной массы), такой, что система отсчета S' может рассматриваться как состоящая из измерительного устройства и частицы Q . Для простоты мы предположим, что массой измерительного устройства можно пренебречь по сравнению с массой частицы Q . Следовательно, система отсчета S' приближенно определяется частицей Q с массой покоя m , где декартова система координат выбрана таким образом, чтобы координаты частицы Q были равны (t', x', y', z') в системе S' и, соответственно, (t, x, y, z) в системе S .

С другой стороны, для удобства мы предположим, что система отсчета S обладает бесконечной массой. Иными словами, система S является классической системой отсчета, тогда как S' представляет собой квантовую систему отсчета. Для простоты не будем впредь рассматривать оси y и z . Тогда Лоренц-преобразование можно записать в виде

$$\begin{cases} x' = (x - vt) / \sqrt{1 - (v^2/c^2)} \\ t' = [t - (vx/c^2)] / \sqrt{1 - (v^2/c^2)} \end{cases}, \quad (1)$$

Поскольку система отсчета S' связана с частицей Q , обозначим через $\mathbf{p} = (p, 0, 0)$ и E импульс и энергию частицы Q в системе S , тогда соответственно $p = Ev/c^2 > 0$. Другими словами, в системе S частица Q обладает 4-мерным импульсом $(E, p, 0, 0)$ и 4-мерным вектором положения $(t, x, 0, 0)$. Используя соотношения $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ и $v = pc^2/E$, можно представить уравнение (1) в виде

$$\begin{cases} x' = (Ex - c^2 pt) / mc^2 \\ t' = (Et - px) / mc^2 \end{cases}. \quad (2)$$

Как известно, переход от классического выражения (2) к квантово-механическому аналогу требует симметризации уравнения (2) и замены всех входящих в него переменных на соответствующие операторы, тогда мы чисто формально получим квантовое преобразование Лоренца (в координатном представлении)

$$\begin{cases} x' = [(\hat{H}x + x\hat{H}) - c^2(\hat{p}t + t\hat{p})] / 2mc^2 \\ t' = [(\hat{H}t + t\hat{H}) - (\hat{p}x + x\hat{p})] / 2mc^2 \end{cases}. \quad (3)$$

где оператор Гамильтона, удовлетворяющий $\hat{H}^2 = \hat{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ и $\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$ ($\hbar$ - постоянная Планка, деленная на 2π). Используя $d\hat{t}/dt = \partial\hat{t}/\partial t + (i/\hbar)[\hat{H}, \hat{t}] = \partial\hat{t}/\partial t = 1$, получим

$$[\hat{H}, \hat{t}] = \hat{H}\hat{t} - \hat{t}\hat{H} = 0. \quad (4)$$

То-есть, в отличие от сопряженной пары x и $\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$, переменные $\hat{H}$ и t не образуют сопряженную пару. Подобно этому, вместо $\partial\hat{t}/\partial x = 0$ получаем $\hat{t}\hat{p} = \hat{p}\hat{t}$.

Следовательно, в классической системе отсчета S на величины $\hat{H}$, $\hat{p}$ и x переменная времени t действует скорее как параметр, чем как оператор, что согласуется с традиционным выводом (время в квантовой механике приобрело иной смысл с приходом квантовой теории). Используя $\hat{H}\hat{t} = \hat{t}\hat{H}$ и $\hat{t}\hat{p} = \hat{p}\hat{t}$, квантово-механическое преобразование Лоренца (3) может быть преобразовано к виду

$$\begin{cases} x' = \frac{(\hat{H}x + x\hat{H})}{2mc^2} - \frac{t\hat{p}}{m} \\ t' = \frac{t\hat{H}}{mc^2} - \frac{(\hat{p}x + x\hat{p})}{2mc^2} \end{cases} \quad (5)$$

Рассмотрим ситуацию, когда частица Q движется относительно системы S с постоянной скоростью v вдоль оси x , при этом имеем $dv/dt = d^2x/dt^2 = 0 = (i/\hbar)[\hat{H}, (i/\hbar)[\hat{H}, x]]$, т.е. $\hat{H}[\hat{H}, x] = [\hat{H}, x]\hat{H}$, откуда следует, что

$$[\hat{H}^2, x] = \hat{H}[\hat{H}, x] + [\hat{H}, x]\hat{H} = 2\hat{H}[\hat{H}, x]. \quad (6)$$

С другой стороны, используя $\hat{H}^2 = \hat{p}^2c^2 + m^2c^4$, получим

$$[\hat{H}^2, x] = \hat{p}[\hat{p}, x]c^2 + [\hat{p}, x]\hat{p}c^2 = -2i\hbar\hat{p}c^2. \quad (7)$$

Комбинируя (6) с (7), имеем:

$$[\hat{H}, x] = -i\hbar\hat{H}^{-1}\hat{p}c^2. \quad (8)$$

Из уравнения (8) можно найти желаемый результат $dx/dt = (i/\hbar)[\hat{H}, x] = \hat{H}^{-1}\hat{p}c^2$, который отвечает классическому выражению $v = dx/dt = pc^2/E$ и теоремам Эренфеста. Действительно, взяв, например, электрон Дирака, путем расщепления каждого оператора на четную и нечетную части, т.е. отбрасывая “*zitterbewegung*”¹ - часть [27], можно получить оператор *истинной* скорости, подобный $dx/dt = \hat{H}^{-1}\hat{p}c^2$. Используя $\hat{H}t = t\hat{H}$, $t\hat{p} = \hat{p}t$, $\hat{p}x = x\hat{p} - i\hbar$, $\hat{H}x = x\hat{H} - i\hbar\hat{H}^{-1}\hat{p}c^2$, $\hat{H}^2 = \hat{p}^2c^2 + m^2c^4$, $\hat{H}\hat{p} = \hat{p}\hat{H}$, $xt = tx$ и уравнение (8), можно получить (см. Приложение А на английском языке в конце статьи):

$$c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2 + \hbar^2c^2\hat{H}^{-2}/4. \quad (9)$$

¹ **Zitterbewegung** является теоретическим движением элементарной частицы по спирали или по кругу, которое является ответственным за возникновение спина. Существование такого движения было впервые предложено Шредингером в 1930 г. – Примеч. пер.

Благодаря тому, что $\hat{H}^2 = \hat{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \geq m^2 c^4$ (для собственных значений или средних значений квантово-механических операторов), для пространственно-подобного или светоподобного интервала $c^2 t'^2 - x'^2 \geq 0$, учитывая (9), получим

$$c^2 t^2 - x^2 \geq -\hbar^2 c^2 \hat{H}^{-2} / 4 \geq -\hbar^2 / 4 m^2 c^2 = -(\tilde{\lambda} / 2)^2, \quad (10)$$

где $\tilde{\lambda} = \hbar / mc$ есть комптоновская длина волны, отвечающей частице Q. Из уравнения (10) следует, что в системе отсчета S частица Q может преодолеть пространственно-подобный интервал при

$$0 > c^2 t^2 - x^2 \geq -(\tilde{\lambda} / 2)^2, \quad (11)$$

что соответствует традиционному выводу квантово-полевой теории. Более того (см. публикации [2-4]), можно показать, что частица Q, удовлетворяющая уравнению (11), аналогична частице, туннелирующей сквозь потенциальный барьер.

С одной стороны, согласно уравнению (11), частица Q может преодолеть пространственно-подобный интервал. С другой стороны, обозначив через $\Gamma(t, x)$ амплитуду вероятности для частицы Q переместиться из точки (0, 0) в точку (t, x), согласно [2] для пространственно-подобного интервала $c^2 t^2 - x^2 < 0$ (т.е. для частицы Q, туннелирующей через потенциальный барьер), имеем:

$$\Gamma(t, x) \propto \exp(-\sqrt{x^2 - c^2 t^2} / \tilde{\lambda}). \quad (12)$$

Следовательно, вероятность (скажем так) для частицы Q переместиться из точки (0, 0) в точку (t, x) есть

$$P(t, x) \propto |\Gamma(t, x)|^2 \propto \exp(-2\sqrt{x^2 - c^2 t^2} / \tilde{\lambda}). \quad (13)$$

При численном анализе всегда также принимают $P(t, x) \geq \exp(-1) \approx 0$, что определяет характеристическую длину полуволны $\tilde{\lambda} / 2$ и эффективный диапазон $0 < \sqrt{x^2 - c^2 t^2} < \tilde{\lambda} / 2$ пространственно-подобного интервала. Иными словами, вероятность $P(t, x)$ для частицы Q переместиться со сверхсветовой скоростью из точки (0, 0) в точку (t, x) НЕ МОЖЕТ игнорироваться при $0 > c^2 t^2 - x^2 \geq -(\tilde{\lambda} / 2)^2$, что согласуется с уравнением (11). Кстати, приняв $\Gamma(t, x) \geq \exp(-1) \approx 0$

вместо $P(t, x) \geq \exp(-1) \approx 0$, получим $0 > c^2 t^2 - x^2 \geq -\lambda^2$, что совпадает с выражением, приведенным в [28]. Однако вероятность $P(t, x) \propto |\Gamma(t, x)|^2$ является наблюдаемой величиной, в то время как амплитуда вероятности $\Gamma(t, x)$ таковой не является, и $\Gamma(t, x)$ обычно представляет собой комплексную функцию, так что нельзя полагать $\Gamma(t, x) \geq \exp(-1) \approx 0$. Следовательно, результат, приведенный в [28], является грубой оценкой.

Имея чисто квантово-механическую природу, член $\hbar^2 c^2 \hat{H}^{-2}/4$ в уравнении (9) существенно обусловлен коммутационным соотношением $[x, \hat{p}] = i\hbar$. Следовательно, тот факт, что частица с конечной массой может преодолевать пространственно-подобный интервал, связан с соотношением неопределенности Гейзенберга.

Заметим, что в нашем случае пространственно-временные координаты определяют также пространственно-временные интервалы (вследствие выбора начала координат). Как упоминалось выше, в классической системе отсчета S имеем $xt = tx$, и время входит скорее как параметр, а не как оператор. С другой стороны, можно доказать, что (см. Приложение В на английском языке в конце статьи):

$$x't' - t'x' = i\hbar(\hat{H}^{-1}x + x\hat{H}^{-1})/2. \quad (14)$$

То-есть в квантовой системе отсчета S' пространственно-временные координаты частицы Q не коммутируют, и время выступает в качестве коммутатора. Действительно, если время выступает в качестве коммутатора, пространственно-временные координаты могут стать некоммутирующими. Например, можно доказать, что нерелятивистский оператор длительности свободного движения [29-32]

$$\hat{T}_{\text{non}} = -m(\hat{p}^{-1}\hat{x} + \hat{x}\hat{p}^{-1})/2$$

удовлетворяет соотношению

$$x\hat{T}_{\text{non}} - \hat{T}_{\text{non}}x = i\hbar(\hat{H}_{\text{non}}^{-1}x + x\hat{H}_{\text{non}}^{-1})/4. \quad (15)$$

где $\hat{H}_{\text{non}} = \hat{p}^2/2m$. Уравнение (15) подобно уравнению (14), но отличается множителем $1/2$, и отсюда следует, что имеется соотношение неопределенности между моментом прибытия и координатой точки прибытия.

Говоря обычными словами, при рассмотрении сверхсветового туннелирования частицы через потенциальный барьер мы с помощью квантово-механического преобразования Лоренца получаем тот же результат, что и с помощью квантовой теории поля.

Настоящая работа была выполнена при поддержке Специализированного фонда докторальных программ высшего образования Китая (Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China) – грант No. 20050614022, и Национального фонда естественных наук Китая (National Natural Science Foundation of China) – грант No. 60671030.

Библиография

- [1] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley, New York, 1995), pp. 27-33.
- [2] W. Greiner and J. Reinhardt, *Quantum Electrodynamics* (Springer-Verlag, Berlin, 1992), pp. 55-60.
- [3] Zhi-Yong Wang and Cai-Dong Xiong, *Phys. Rev. A* **75**, 013813 (2007).
- [4] Zhi-Yong Wang and Cai-Dong Xiong, *Phys. Rev. A* **75**, 042105 (2007).
- [5] A. M. Steinberg, P. G. Kwiat, and R. Y. Chiao, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 708 (1993).
- [6] Ch. Spielmann, R. Szipöcs, A. Stingl, and F. Krausz, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2308 (1994).
- [7] Ph. Balcou and L. Dutriaux, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 851 (1997).
- [8] G. Nimtz and W. Heitmann, *Prog Quant Electr.* **21**, 81 (1997).
- [9] G. Nimtz, A. Haibel, and R.-M. Vetter, *Phys. Rev. E* **66**, 037602 (2002).
- [10] A. P. Barbero, H. E. Hernández-Figueroa and E. Recami, *Phys. Rev. E* **62**, 8628 (2000).
- [11] S. Longhi, P. Laporta, M. Belmonte, and E. Recami, *Phys. Rev. E* **65**, 046610 (2002).
- [12] A. D. Jackson, A. Lande, and B. Lautrup, *Phys. Rev. A* **64**, 044101 (2001).
- [13] H.G. Winful, *Nature (London)* **424**, 638 (2003).

- [14] H. G. Winful, Phys. Rev. Lett. **90**, 023901 (2003).
- [15] H. G. Winful, Phys. Rev. E **68**, 016615 (2003).
- [16] H. G. Winful, Phys. Rev. E **72**, 046608 (2005).
- [17] H. G. Winful, Phys. Reports. **436**, 1 (2006).
- [18] D. Sokolovski, A. Z. Msezane, and V. R. Shaginyan, Phys. Rev. A **71**, 064103 (2005).
- [19] Jr. D. Pandres, Int. J. Theor. Phys. **23**, 839 (1984)
- [20] R. Lieu, Found. Phys. **31**, 1233 (2001).
- [21] I. T. Durham, Phys. Perspect. **5**, 398 (2003).
- [22] Y. Aharonov and T. Kaufherr, Phys. Rev. D **30**, 368 (1984).
- [23] M. Toller, Nuovo Cim. B **112**, 1013 (1997).
- [24] C. Rovelli, Class. Quantum Grav. **8**, 317 (1991).
- [25] S. Mazzucchi, J. Math. Phys. **42**, 2477 (2001).
- [26] S. D. Bartlett, T. Rudolph, and R. W. Spekkens, Rev. Mod. Phys. **79**, 555 (2007).
- [27] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, Berlin, 2000), pp. 111-118.
- [28] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley & Sons, New York, 1972), p. 61.
- [29] J. G. Muga, C. R. Leavens, and J. P. Palao, Phys. Rev. A **58**, 4336 (1998).
- [30] I. L. Egusquiza and J. G. Muga, Phys. Rev. A **61**, 012104 (1999).
- [31] J. G. Muga and C. R. Leavens, Phys. Rep. **338**, 353 (2000).
- [32] Zhi-Yong Wang and Cai-Dong Xiong, J. Phys. A: Math. Theor. **40**, 1897 (2007).

APPENDIX A: DERIVATION OF Eq. (9)

Using Eq. (5) one has

$$c^2 t'^2 - x'^2 = \left[\frac{t\hat{H}}{mc} - \frac{(\hat{p}x + x\hat{p})}{2mc} \right]^2 - \left[\frac{(\hat{H}x + x\hat{H})}{2mc^2} - \frac{t\hat{p}}{m} \right]^2, \quad (\text{a1})$$

Using $\hat{H}t = t\hat{H}$, $t\hat{p} = \hat{p}t$, $xt = tx$ and $\hat{H}\hat{p} = \hat{p}\hat{H}$ one has

$$\frac{1}{2m^2c^2} [-t\hat{H}(\hat{p}x + x\hat{p}) - (\hat{p}x + x\hat{p})t\hat{H} + (\hat{H}x + x\hat{H})t\hat{p} + t\hat{p}(\hat{H}x + x\hat{H})] = 0, \quad (\text{a2})$$

then

$$c^2 t'^2 - x'^2 = \frac{t^2 \hat{H}^2}{m^2 c^2} + \frac{(\hat{p}x + x\hat{p})(\hat{p}x + x\hat{p})}{4m^2 c^2} - \frac{(\hat{H}x + x\hat{H})(\hat{H}x + x\hat{H})}{4m^2 c^4} - \frac{t^2 \hat{p}^2}{m^2}. \quad (\text{a3})$$

Using $\hat{p}x = x\hat{p} - i\hbar$, $\hat{H}x = x\hat{H} - i\hbar\hat{H}^{-1}\hat{p}c^2$, and $\hat{H}^2 = \hat{p}^2 c^2 + m^2 c^4$, one has

$$c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 t^2 + \frac{(2x\hat{p} - i\hbar)(2x\hat{p} - i\hbar)}{4m^2 c^2} - \frac{(2x\hat{H} - i\hbar\hat{H}^{-1}\hat{p}c^2)(2x\hat{H} - i\hbar\hat{H}^{-1}\hat{p}c^2)}{4m^2 c^4}. \quad (\text{a4})$$

Because

$$\begin{aligned} (2x\hat{p} - i\hbar)(2x\hat{p} - i\hbar) &= 4x\hat{p}x\hat{p} - 4i\hbar x\hat{p} - \hbar^2 \\ &= 4x(x\hat{p} - i\hbar)\hat{p} - 4i\hbar x\hat{p} - \hbar^2 = 4x^2 \hat{p}^2 - 8i\hbar x\hat{p} - \hbar^2, \end{aligned} \quad (\text{a5})$$

$$\begin{aligned} (2x\hat{H} - i\hbar\hat{H}^{-1}\hat{p}c^2)(2x\hat{H} - i\hbar\hat{H}^{-1}\hat{p}c^2) &= 4x\hat{H}x\hat{H} - 2i\hbar x\hat{p}c^2 - 2i\hbar\hat{p}c^2\hat{H}^{-1}x\hat{H} - \hbar^2\hat{H}^{-2}\hat{p}^2c^4 \\ &= 4x(x\hat{H} - i\hbar\hat{H}^{-1}\hat{p}c^2)\hat{H} - 2i\hbar x\hat{p}c^2 - 2i\hbar\hat{p}c^2\hat{H}^{-1}(\hat{H}x + i\hbar\hat{H}^{-1}\hat{p}c^2) - \hbar^2\hat{H}^{-2}\hat{p}^2c^4 \\ &= 4x^2\hat{H}^2 - 4i\hbar x\hat{p}c^2 - 2i\hbar x\hat{p}c^2 - 2i\hbar\hat{p}c^2x + 2\hbar^2\hat{H}^{-2}\hat{p}^2c^4 - \hbar^2\hat{H}^{-2}\hat{p}^2c^4 \\ &= 4x^2\hat{H}^2 - 6i\hbar x\hat{p}c^2 - 2i\hbar c^2(x\hat{p} - i\hbar) + \hbar^2\hat{H}^{-2}\hat{p}^2c^4 \\ &= 4x^2\hat{H}^2 - 8i\hbar x\hat{p}c^2 - 2\hbar^2c^2 + \hbar^2\hat{H}^{-2}\hat{p}^2c^4 \end{aligned} \quad , (\text{a6})$$

one has

$$\begin{aligned}
& \frac{(2x\hat{p} - i\hbar)(2x\hat{p} - i\hbar)}{4m^2c^2} - \frac{(2x\hat{H} - i\hbar\hat{H}^{-1}\hat{p}c^2)(2x\hat{H} - i\hbar\hat{H}^{-1}\hat{p}c^2)}{4m^2c^4} \\
&= \frac{1}{4m^2c^4}[(4x^2\hat{p}^2c^2 - 8i\hbar x\hat{p}c^2 - \hbar^2c^2) - (4x^2\hat{H}^2 - 8i\hbar x\hat{p}c^2 - 2\hbar^2c^2 + \hbar^2\hat{H}^{-2}\hat{p}^2c^4)] \\
&= \frac{1}{4m^2c^4}[-4x^2m^2c^4 + \hbar^2c^2 - \hbar^2\hat{H}^{-2}\hat{p}^2c^4] \quad , \quad (\text{a7}) \\
&= -x^2 + \frac{1}{4m^2c^4}[\hbar^2c^2\hat{H}^{-2}(\hat{H}^2 - \hat{p}^2c^2)] \\
&= -x^2 + \hbar^2c^2\hat{H}^{-2}/4
\end{aligned}$$

then one has

$$c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2 + \hbar^2c^2\hat{H}^{-2}/4, \quad (\text{a8})$$

which is exactly Eq. (9).

APPENDIX B: DERIVATION OF Eq. (14)

Using $\hat{H}t = t\hat{H}$, $t\hat{p} = \hat{p}t$, $xt = tx$, $\hat{H}\hat{p} = \hat{p}\hat{H}$ and Eq. (5), one has

$$x't' - t'x' = \frac{t}{2m^2c^4} \{[(\hat{H}x + x\hat{H})\hat{H} - \hat{H}(\hat{H}x + x\hat{H})] + c^2[\hat{p}(\hat{p}x + x\hat{p}) - (\hat{p}x + x\hat{p})\hat{p}]\} \\ - \frac{(\hat{H}x + x\hat{H})(\hat{p}x + x\hat{p}) - (\hat{p}x + x\hat{p})(\hat{H}x + x\hat{H})}{4m^2c^4} . \quad (b1)$$

Using $\hat{p}x = x\hat{p} - i\hbar$, $\hat{H}x = x\hat{H} - i\hbar\hat{H}^{-1}\hat{p}c^2$, and $\hat{H}^2 = \hat{p}^2c^2 + m^2c^4$, one has

$$\begin{aligned} & [(\hat{H}x + x\hat{H})\hat{H} - \hat{H}(\hat{H}x + x\hat{H})] + c^2[\hat{p}(\hat{p}x + x\hat{p}) - (\hat{p}x + x\hat{p})\hat{p}] \\ &= [x\hat{H}^2 - \hat{H}^2x] + c^2[\hat{p}^2x - x\hat{p}^2] \\ &= x(\hat{H}^2 - \hat{p}^2c^2) + (\hat{p}^2c^2 - \hat{H}^2)x \\ &= xm^2c^4 - m^2c^4x = 0 \end{aligned} \quad (b2)$$

$$\begin{aligned} & (\hat{H}x + x\hat{H})(\hat{p}x + x\hat{p}) - (\hat{p}x + x\hat{p})(\hat{H}x + x\hat{H}) \\ &= \hat{H}x\hat{p}x + \hat{H}x^2\hat{p} + x\hat{H}x\hat{p} - \hat{p}x\hat{H}x - \hat{p}x^2\hat{H} - x\hat{p}x\hat{H} \\ &= \hat{H}x\hat{p}x + \hat{H}x(\hat{p}x + i\hbar) + x\hat{H}(\hat{p}x + i\hbar) - (x\hat{p} - i\hbar)\hat{H}x - (x\hat{p} - i\hbar)x\hat{H} - x\hat{p}x\hat{H} \\ &= 2\hat{H}x\hat{p}x + 2i\hbar\hat{H}x + 2i\hbar x\hat{H} - 2x\hat{p}x\hat{H} \\ &= 2(x\hat{H} - i\hbar\hat{H}^{-1}\hat{p}c^2)\hat{p}x - 2x\hat{p}(\hat{H}x + i\hbar\hat{H}^{-1}\hat{p}c^2) + 2i\hbar\hat{H}x + 2i\hbar x\hat{H} \\ &= 2x\hat{H}\hat{p}x - 2i\hbar\hat{H}^{-1}\hat{p}^2c^2x - 2x\hat{p}\hat{H}x - 2i\hbar x\hat{H}^{-1}\hat{p}^2c^2 + 2i\hbar\hat{H}x + 2i\hbar x\hat{H} \\ &= 2i\hbar\hat{H}^{-1}(\hat{H}^2 - \hat{p}^2c^2)x + 2i\hbar x\hat{H}^{-1}(\hat{H}^2 - \hat{p}^2c^2) \\ &= 2i\hbar m^2c^4(\hat{H}^{-1}x + x\hat{H}^{-1}) \end{aligned} \quad (b3)$$

Substituting (b2) and (b3) into (b1), one has

$$x't' - t'x' = i\hbar(\hat{H}^{-1}x + x\hat{H}^{-1})/2 . \quad (b4)$$

Then we obtain Eq. (14).