Релятивистский парадокс, по-видимому, нарушающий закон сохранения импульса в электромагнитных системах

Перевод А. Чубыкало (achubykalo@yahoo.com.mx)

Eur. J. Phys. **20** (1999) 39–44.

A relativistic paradox seemingly violating conservation of momentum law in electromagnetic systems

Oleg D. Jefimenko

Рассмотрены два одинаковых электрических точечных заряда, которые удаляются друг от друга. Для наблюдателя, находящегося в покое в системе отсчета, в которой заряды движутся с равными скоростями, силы, оказываемые зарядами друг на друга, оказываются равными по величине и противоположными по направлению, так что никакой чистой силы в системе двух зарядов нет. Однако наблюдателю, находящемуся в покое в системе отсчёта, в которой один из зарядов неподвижен, две силы кажутся неравными, потому заряды, как представляется, генерируют чистую силу для самих себя. Разрешение этого парадокса – очень поучительное упражнение в теории относительности и электромагнетизме.

1. Введение

Многочисленные «релятивистские парадоксы» сопровождали теорию относительности с момента её появления на рубеже веков. Разумеется, в истинной науке парадоксов не может быть. И, следовательно, все научные парадоксы являются парадоксами лишь до того момента, пока они не будут решены. Решение релятивистского парадокса, то есть поиск и устранение ошибок в рассуждениях или в вычислениях, ведущих к парадоксу, обычно является очень интересным и полезным упражнением. «Парадокс» и его разрешение, представленное в этой статье, является примером такого упражнения.

2. Парадокс

Два одинаковых заряда[1] q_1 и q_2 наблюдаются в системе отсчета Σ', которая перемещается с постоянной скоростью $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ относительно стационарной системы отсчёта Σ (лаборатория), как показано на рис. 1(a). Предположим, что единственными силами, действующими на два заряда, являются силы электрического отталкивания, прилагаемые зарядами друг к другу. Если массы двух зарядов достаточно велики, что мы предполагаем, а ускорения двух зарядов пренебрежимо малы, мы можем предположить, что заряды отходят друг от друга с равной постоянной скоростью u'. В момент $t' = 0$ заряд q_1 локализован на оси y', а заряд q_2 находится на расстоянии x' от q_1 и на такой же высоте выше оси x'.

Электрическое поле, создаваемое одним из зарядов в месте расположения другого, согласно формуле Хевисайда [1] будет

$$\mathbf{E}' = \frac{q(1 - u'^2/c^2)}{4\pi\varepsilon_0 r'^3[1 - (u'^2/c^2)\sin^2\theta']^{3/2}}\mathbf{r}' , \tag{1}$$

[1] Хотя заряды идентичны, мы будем обозначать их как q_1 и q_2, так как нам нужно будет различать их в последующих расчетах.

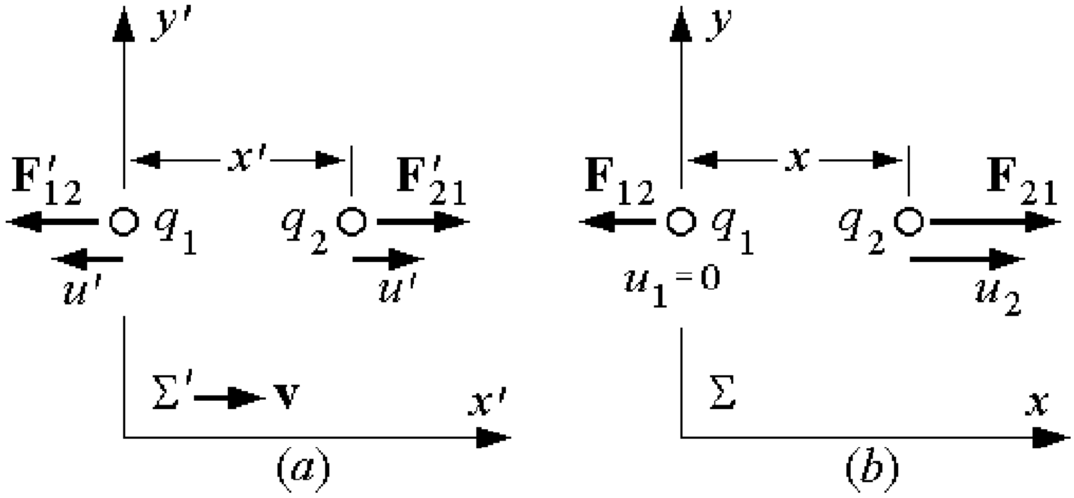

Рис. 1 Наблюдаемые в движущейся системе отсчёта Σ' (a) оба заряда оказывают равное и противоположное воздействие друг на друга, тем самым удовлетворяя закону действия-противодействия и закону сохранения импульса. Olнако, наблюдаемые в системе отсчёта Σ (b) заряды удовлетворяют закону действия-противодействия, и, создавая силу, действующую на самих себя, похоже, нарушают закон сохранения импульса.

где ε_0 – диэлектрическая проницаемость свободного пространства, $\mathbf{u}'$ – скорость поле-производящего заряда, $\mathbf{r}'$ – радиус-вектор от поле-производящего заряда к поле-испытывающему заряду, θ' – угол между $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{u}'$, а c – скорость света. Поскольку $\theta' = 0$ и $r' = x'$ в нашем случае, уравнение (1) сводится к

$$\mathbf{E}' = \pm\frac{q(1-u'^2/c^2)}{4\pi\varepsilon_0 x'^2}\mathbf{i}\,. \tag{2}$$

Сила, приложенная зарядом q_2 к q_1 (сила, действующая на q_1), будет, таким образом,

$$\mathbf{F}'_{12} = q_1\mathbf{E}'_{12} = -\frac{q_1 q_2(1-u'^2/c^2)}{4\pi\varepsilon_0 x'^2}\mathbf{i}\,, \tag{3}$$

а сила, приложенная зарядом q_1 к q_2 (сила, действующая на q_2), будет

$$\mathbf{F}'_{21} = q_2\mathbf{E}'_{21} = -\frac{q_2 q_1(1-u'^2/c^2)}{4\pi\varepsilon_0 x'^2}\mathbf{i}\,. \tag{4}$$

Поскольку две силы равны по величине и противоположны по направлению, полная сила в системе равна нулю.

Давайте теперь рассмотрим ту же систему двух зарядов из лабораторной системы отсчёта Σ. Время наблюдения $t = 0$. Для простоты мы предположим, что скорость Σ' относительно лаборатории $v = u'i$, где u' – скорость двух зарядов в Σ'. В этом случае заряд q_1 (как видится из лаборатории) находится в состоянии покоя. Поэтому только заряд q_2 оказывается движущимся (рис. 1(b)). Пусть его скорость будет u_2.

Чтобы найти силы $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$, которыми два заряда действуют друг на друга в лаборатоной системы отсчёта, мы могли бы преобразовать уравнения (3) и (4), используя релятивистские преобразования. Однако, гораздо проще найти $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$, опять используя формулу Хевисайда, уравнение (1), (в этот раз без штрихов).

Учитывая, что скорость заряда q_2 в лабораторной системе отсчёта u_2, и используя уравненеие (1), для силы $\mathbf{F}_{12}$, действующей на заряд q_1 в лабораторной системе отсчёта, мы имеем

$$\mathbf{F}_{12} = q_1\mathbf{E}_{12} = -\frac{q_1 q_2 (1 - u^2/c^2)}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\mathbf{i} \ . \tag{5}$$

Поскольку заряд q_1 является стационарным в лабораторной системе отсчёта, для силы $\mathbf{F}_{21}$, действующей на заряд q_2 в лабораторной системе отсчёта, мы аналогично имеем

$$\mathbf{F}_{21} = q_2\mathbf{E}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\mathbf{i} \, . \tag{6}$$

Теперь, сравнивая уравнения (5) и (6), мы находим, что $\mathbf{F}_{12} \neq \mathbf{F}_{21}$. Таким образом, в то время как в Σ' силы $\mathbf{F}'_{12}$ и $\mathbf{F}'_{21}$ удовлетворяют закону действия-противодействия, и, значит, система двух зарядов находится в равновесии, в Σ же два заряда генерируют силу сами на себя:

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \frac{q_1 q_2 u_2^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 x^2}\mathbf{i} \tag{7}$$

и, следовательно, система, по-видимому, не находится в равновесии.

Таким образом, мы пришли к парадоксальному результату: вопреки принципу относительности, динамическое равновесие системы и, следовательно, сохранение закона импульса, зависят от системы отсчета, из которой наблюдается система.

3. Решение парадокса

Взаимодействие движущихся зарядов представляет собой сложный процесс, включающий всё электромагнитное поле, созданное зарядами. Хотя в нашем случае магнитное поле, создаваемое зарядами, ноль вдоль линии, соединяющей их, так что заряды не испытывают магнитных сил, магнитное не равно нулю вне этой линии и вместе с электрическим полем зарядов образует электромагнитное поле. Это электромагнитное поле является носителем электромагнитного импульса. По мере того как заряды движутся, электромагнитное поле изменяется, а также электромагнитный импульс. Изменение электромагнитного импульса создает электромагнитную силу. Таким образом, чтобы получить полную картину электродинамических соотношений в системе двух зарядов, мы должны учитывать не только силы, оказываемые зарядами друг на друга, но и электромагнитный импульс, создаваемый зарядами.[2]

Как показано в приложении, всякий раз, когда стационарный точечный заряд q взаимодействует с точечным зарядом, который движется вдоль линии, соединяющей два заряда, оба заряда создают "электромагнитный импульс взаимодействия":

$$\mathbf{G} = q\mathbf{A} \, , \tag{8}$$

---

[2] Нам нужно только учитывать взаимный или взаимодействующий электромагнитный импульс двух зарядов, поскольку стационарный заряд q_1 не создает магнитного поля и, следовательно, не имеет электромагнитного импульса, а электромагнитный импульс, связанный с электрическим и магнитным собственными полями движущегося заряда q_2, не подвержен влиянию движения заряда. Подробный анализ электромагнитного импульса в системах, связанных с движением зарядов см. в [2, стр. 67-79].

где $\mathbf{A}$ – векторный потенциал, создаваемый движущимся зарядом в точке, где находится стационарный заряд q.[3]

Магнитный векторный потенциал, произведённый движущимся зарядом q_2 в точке $x = 0$, где локализован стационарный заряд q_1, будет [4]

$$\mathbf{A} = \frac{q_2 u_2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 (x + u_2 t)} \mathbf{i} \,, \tag{9}$$

где t – время в которое наблюдается потенциал.[4]

Таким образом, по уравнениям (8) и (9) электромагнитный импульс взаимодействия в нашей системе двух зарядов (наблюдаемый из лабораторной системы отсчёта) будет

$$\mathbf{G} = \frac{q_1 q_2 u_2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 (x + u_2 t)} \mathbf{i} \,. \tag{10}$$

Дифференцируя уравнение (10) по t и затем полагая $t = 0$ (потому что согласно секции 2 время наблюдения двух зарядов $t = 0$), мы получим

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = -\frac{q_1 q_2 u_2^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 x^2} \mathbf{i} \,. \tag{11}$$

Сравнивая уравнение (11) с (7), мы видим, что скорость изменения электромагнитного импульса, заданная в (11), равна по величине и противоположна по направлению "несбалансированной" силе, данной в уравнении (7). Таким образом, оба заряда в конце концов находятся в равновесии: остаточная сила, представленная в уравнении (7), необходима для компенсации увеличения импульса, находящегося в электромагнитном поле системы.

4. Обсуждение

Парадокс, который мы обнаружили в секции 2, был следствием нашей неспособности проанализировать надлежащим образом все электромагнитные эффекты, происходящие в рассматриваемой системе. Как мы увидели, уравнения (8) и (11), представляющие электромагнитный импульс и скорость его изменения, имеют решающее значение для разрешения парадокса. Очевидно, что эти два уравнения можно интерпретировать как указание на существование «векторной потенциальной силы»

$$\mathbf{F}_{\mathbf{A}} = q \frac{d\mathbf{A}}{dt} \tag{12}$$

в рассматриваемой системе. Тогда наш парадокс можно было бы интерпретировать как результат пренебрежения учетом этой особой силы. Примечательно, что хотя эта сила связана с магнитным полем, она может существовать в точках, где отсутствует магнитное поле, таких как точки вдоль линии движения заряда q_2.

---

[3] Подробное обсуждение связи между магнитным векторным потенциалом и электромагнитным импульсом см. в [3]. Уравнение (8) не является калибровочно инвариантным. В приложении оно выводится для калибровки Лоренца (Льенарда-Вихерта).

[4] Большинство книг дают только мгновенное значение, или "моментальный снимок" векторного потенциала при $t = 0$. Обсуждение см. в в [5].

Приложение

Следующее векторное тождество выполняется для любых двух векторов $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$:

$$\oint(\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2)\, d\mathbf{S} - \oint \mathbf{V}_1(\mathbf{V}_2 \cdot d\mathbf{S}) - \oint \mathbf{V}_2(\mathbf{V}_1 \cdot d\mathbf{S}) = \int [\mathbf{V}_1 \times (\nabla \times \mathbf{V}_2) + \mathbf{V}_2 \times (\nabla \times \mathbf{V}_1) - \mathbf{V}_2(\nabla \cdot \mathbf{V}_1) - \mathbf{V}_1(\nabla \cdot \mathbf{V}_2)] dV, \tag{A1}$$

где интегралы берутся по всему пространству (это расширение теоремы Гаусса векторного анализа на два вектора $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$). Если мы применим это векторное тождество к полю электрического смещения $\mathbf{D}$ и векторному потенциалу , мы получим

$$\oint(\mathbf{D} \cdot \mathbf{A}) d\mathbf{S} - = \int [\mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{D}) - \mathbf{D}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{D})]\, dV\,. \tag{A2}$$

Пусть $\mathbf{D}$ будет обусловлено стационарным независимым от времени точечным зарядом q, и пусть $\mathbf{A}$ будет обусловлено точечным зарядом q_m, движущимся с постоянной скоростью. Поскольку $\mathbf{D}$ и $\mathbf{A}$ регулярны на бесконечности, поверхностные интегралы в уравнении (A2) исчезают. Для стационарного независимого от времени заряда $\nabla \times \mathbf{D} = 0$, поэтому второй член в объёмном интеграле исчезает. Уравнение (A2) тогда сводится к

$$\int [\mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{A})]\, dV = \int \mathbf{D}(\nabla \cdot \mathbf{A})\, dV + \int \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{D}) dV. \tag{A3}$$

Поскольку $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, где $\mathbf{B}$ – поле плотности магнитного потока, произведённое движущимся зарядом. Интеграл слева представляет электромагнитный импульс $\mathbf{G}$, ассоциированный с взаимодействием между двумя зарядами. Таким огбразом, заменяя $\nabla \cdot \mathbf{D}$ в последнем интеграле на ϱ, где ϱ – плотность заряда стационарного точечного заряда, мы запишем уравнение (A3) как

$$\mathbf{G} = \int \mathbf{D}(\nabla \cdot \mathbf{A})\, dV + \int \mathbf{A}\varrho\, dV. \tag{A4}$$

Поскольку объём, занимаемый стационарным точечным зарядом является бесконечно малым, посдедний интеграл это промсто $q\mathbf{A}$. Таким образом, уравнение (A4) может быть записано как

$$\mathbf{G} = \int \mathbf{D}(\nabla \cdot \mathbf{A})\, dV + q\mathbf{A}\,. \tag{A5}$$

Как известно, векторный потенциал точечного заряда, движущегося с постоянной скоростью, удовлетворяет условию Лоренца (см, например [4, стр. 132-3])

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,, \tag{A6}$$

где φ – скалярный электрический потенциал, произведённый зарядом. Подставляя уравнение (A6) в (A5), мы имеем

$$\mathbf{G} = -\frac{1}{c^2}\int \mathbf{D}\frac{\partial\varphi}{\partial t}dV + q\mathbf{A}\,. \tag{A7}$$

Давайте предположим, что два заряда локализованы на оси x, стационарный заряд q находится в начале координат, скорость движущего заряда q_m $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$, и движущийся заряд находится на расстоянии $x + vt$ от начала, где t – время, в которое наблюдаются два заряда.

Скалярный электрический потенциал, произведённый зарядом q_m в точке $x^{'}, y^{'}, z^{'}$ (см., например, [4, стр. 129] или [5, стр. 97]), будет

$$\varphi = \frac{q_m}{4\pi\varepsilon_0[(x^{'} - x - vt)^2 + (1 - v^2/c^2)(y^{'2} + z^{'2})]^{1/2}}\,. \tag{A8}$$

Дифференцируя уравнение (A8), мы получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{q_m v(x^{'} - x - vt)}{4\pi\varepsilon_0[(y^{'2} + z^{'2})(x^{'} - x - vt)^2 + (1 - v^2/c^2)(y^{'2} + z^{'2})]^{3/2}}\,. \tag{A9}$$

Мы можем упростить знаменатель в уравнении (A9), замечая, что $(x^{'} - x - vt)^2 + y^{'2} + z^{'2} = r^2$, и что $(y^{'2} + z^{'2})/r^2 = \sin^2\theta$, где r – расстояние от движущегося заряда q_m до точки $x^{'}, y^{'}, z^{'}$, и где θ – угол между r и осью x. Из-за симметрии системы только x-компонента $\mathbf{D}$ даёт вклад в интеграл в (A7). Эта компонента $D_x = qx^{'}/4\pi\varepsilon_0 R^3$, где R – расстиояние от стационарного заряда q (начало координат) до точки $x^{'}, y^{'}, z^{'}$. Выражая подынтегральное выражение в (A7) в терминах R и θ, мы можем взять интеграл по R с помощью таблиц. Мы получаем

$$-\frac{\cos\theta}{(x + vt)[1 - (v^2/c^2)\sin^2\theta]^{1/2}}\,, \tag{A10}$$

которое нечётно в $\cos\theta$. Следовательно, интеграл в (A7) исчезает. Таким образом, для рассматриваемого случая

$$\mathbf{G} = q\mathbf{A}\,. \tag{11}$$

Ссылки

[1] Heaviside O 1888 The electromagnetic effects of a moving charge The Electrician 22 147–8

[2] Jefimenko O D 1992 Causality, Electromagnetic Induction, and Gravitation (Star City, WV: Electret Scientific) pp 67–79

[3] Semon M D and Taylor J R 1996 Thoughts on the magnetic vector potential Am. J. Phys. 64 1361–9

[4] See, for example: Rosser W G V 1968 Classical Electromagnetism via Relativity (New York: Plenum) p 129

[5] Jefimenko O D 1997 Electromagnetic Retardation and Theory of Relativity (Star City, WV: Electret Scientific) pp 69, 70, 97