

УПРОЩЕННЫЙ ВЫВОД ФОРМУЛ ДЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ УНРУ, ЭНТРОПИИ И ВРЕМЕНИ ИСПАРЕНИЯ НА ОСНОВЕ АНАЛОГИИ С ПРАВИЛОМ КВАНТОВАНИЯ БОРА

В. Панкович и Д.Капор (Сербия)

Сокращенный перевод М.Х. Шульмана (shulman@dol.ru)

arXiv:1011.1473v1 [gr-qc]

A SIMPLIFIED, BOHR QUANTUM THEORETICAL DERIVATION OF THE UNRUH TEMPERATURE, ENTROPY AND EVAPORATION

Vladan Panković (vladan.pankovic@df.uns.ac.rs), Darko V. Kapor

Department of Physics, Faculty of Sciences, 21000 Novi Sad,
Trg Dositeja Obradovića 4, Serbia,

PACS number: 04.70.Dy

Аннотация

В статье приводится вывод формулы для температуры Унру на примере сферической системы с использованием простого правила, сходного с правилом квантования Бора, и соотношения де-Бройля. Предполагается также тепловое равновесие. (Наше правило, при более глубоком анализе, выходящем за пределы данной статьи, в случае черной дыры Шварцшильда оказывается близким к результатам, полученным в петлевой теории струн Copeland'a и Lahiri.) Во-первых, мы предполагаем, что на поверхности большой системы ее гравитационное поле может генерировать некоторые квантовые возбуждения, т.е. малые квантовые системы. Спектр масс указанных малых квантовых систем определяется на основе правила, согласно которому эти состояния соответствуют орбитам с целочисленными квантовыми номерами для редуцированной волны Комптона для этих малых систем. Во-вторых, мы предполагаем, что величина классического гравитационного взаимодействия между большой системой и малой квантовой системой в основном состоянии соответствует тепловой кинетической энергии малой квантовой системы, взаимодействующей с большой системой в качестве теплового резервуара. Это очень похоже на теорему вириала для идеального газа и позволяет непосредственно и правильно вывести формулу для температуры Унру. Наконец, используя соотношение для температуры Унру и закон термодинамики, мы впервые предлагаем соотношения для соответствующей энтропии Унру и временем испарения Унру данной системы и показываем, что для черной дыры Шварцшильда три эти параметра могут быть сведены к температуре Хокинга, энтропии Бекенштейна-Хокинга и времени испарения Хокинга.

Прежде всего, рассматривается гравитационное поле большой сферической системы с массой M и характерным радиусом R , которая создает ускорение

$$a = \frac{GM}{R^2} \quad (1)$$

где G – гравитационная постоянная Ньютона. Предполагается, что это поле может создавать малые квантовые возбуждения (квантовые системы), которые подчиняются условию квантования, сходному с правилом Бора:

$$m_n c R = n \frac{\hbar}{2\pi}, \text{ где } m_n \ll M \text{ и } n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

где m_n и $E_n = m_n c^2$, $m_n \ll M$ и $n = 1, 2, \dots$ отвечают массе и энергии n -ого малого квантового возбуждения. Попросту говоря, (2) представляет собой постулат о квантовых свойствах гравитационного поля большой системы вблизи ее поверхности. Тогда для наинизшего уровня энергии можно записать соотношение

$$kT = V = \frac{Gm_1 M}{R} \quad (8)$$

где kT – статистическая средняя кинетическая энергия малой системы, контактирующей с большой системой как с тепловой баней (k – постоянная Больцмана, T – эффективная температура). Отсюда можно вывести правильное соотношение для формулы Унру:

$$T = \frac{1}{k} \frac{Gm_1 M}{R} = \frac{1}{k} \frac{\hbar}{2\pi c} \frac{GM}{R^2} = \frac{1}{k} \frac{\hbar}{2\pi c} a \quad (9)$$

В случае черной дыры Шварцшильда $R=2GM/c^2$, так что получается правильное выражение для температуры Хокинга:

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM}. \quad (12)$$

Далее, излучение Унру должно удовлетворять термодинамическому условию

$$dMc^2 = TdS \quad (13)$$

где S – энтропия. Затем автор производит следующие преобразования:

$$dS = k \frac{2\pi c^3}{\hbar} \frac{R^2}{GM} dM = \frac{k}{2} \frac{4\pi R^2}{\frac{\hbar G}{c^3}} d(\ln[\frac{M}{M_0}]) = \frac{k}{2} \frac{A}{L_P^2} d(\ln[\frac{M}{M_0}]) \quad (15)$$

$$S = \frac{k}{2} \frac{4\pi R^2}{\frac{\hbar G}{c^3}} \ln[\frac{M}{M_0}] = \frac{k}{2} \frac{A}{L_P^2} \ln[\frac{M}{M_0}]. \quad (16)$$

где

$$A = 4\pi R^2 \quad (17)$$

представляет собой площадь поверхности большой системы, $L_P = (\frac{\hbar G}{c^3})^{\frac{1}{2}}$ – планковская длина, M_0 – некоторая константа с размерностью массы (можно предположить, что это – планковская масса $M_P = (\frac{\hbar c}{G})^{\frac{1}{2}}$). В этом случае энтропия Унру будет практически пропорциональна произведению площади поверхности большой системы на логарифм ее массы. В специальном случае черной дыры Шварцшильда это дает

$$S = k4\pi GM^2\hbar c = \frac{k}{4} \frac{A}{L_P^2} \quad (19)$$

т.е. правильное выражение Бекенштейна-Хокинга для энтропии черной дыры.

Далее предполагается, что большая система излучает подобно черному телу с температурой Унру, тогда по закону Стефана-Больцмана справедливо выражение

$$-\frac{1}{A} \frac{dM}{dt} c^2 = \sigma T^4 \quad (24)$$

Отсюда путем несложного интегрирования автор выводит формулу для длительности испарения большой системы от начальной массы M_{in} до планковского значения M_P :

$$\tau = \frac{1}{3\alpha} \frac{M_{in}^3 - M_P^3}{M_{in}^3 M_P^3} \simeq \frac{1}{3\alpha M_P^3} \text{ для } M \gg M_P. \quad (26)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{\sigma A}{c^2} \left(\frac{1}{k} \frac{\hbar}{2\pi c} \frac{G}{R^2} \right)^4.$$

В специальном случае черной дыры Шварцшильда можно получить

$$\tau = \frac{1}{3\beta} M_{in}^3. \quad (29)$$

где

$$\beta = \frac{\sigma}{c^2} 16\pi \frac{G^2 M^2}{c^4} \left(\frac{\hbar c^3}{k 8\pi G} \right)^4$$

и, согласно этому результату, время испарения по Хокингу пропорционально третьей степени начальной массы черной дыры. Это, однако, не так в общем случае испарения при температуре Унру.

Ссылки

- [1] B. Unruh, Phys. Rev. D 14 (1976)
- [2] R. M. Wald, Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics (University of Chicago press, Chicago, 1994)
- [3] R. M. Wald, The Thermodynamics of Black Holes, gr-qc/9912119
- [4] D. N. Page, Hawking Radiation and Black Hole Thermodynamics, hep-th/0409024
- [3] P. M. Alsing, P. W. Milloni, Simplified Derivation of the Hawking-Unruh temperature for an accelerating observer in vacuum, Am. J. Phys. 72 (2004) 1524 ; quant-ph/0401170v2
- [6] D. V. Fursaev, Can One Understand Black Hole Entropy without Knowing Much about Quantum Gravity?, gr-qc/0404038
- [7] E. J. Copeland, A.Lahiri, Class. Quant. Grav. , 12 (1995) L113 ; gr-qc/9508031