

Работа, извлекаемая из информации, содержащейся в двухчастичной системе

Л. Левитин и Т. Тоффоли (США)

Перевод М.Х. Шульмана (shulman@dol.ru)

arXiv:1101.1325v1 [quant-ph] 6 Jan 2011

levitin/arxiv/work (January 10, 2011)

Work recoverable from two-particle information

Lev B Levitin and Tommaso Toffoli (levitin@bu.edu, tt@bu.edu)

Electrical and Computer Engineering, Boston University, MA 02215

Показано, как информация, содержащаяся в парных корреляциях между атомами газа, может быть использована для полного преобразования тепла, взятого из термостата, в механическую работу в процессе релаксации системы к состоянию ее теплового равновесия. Рассмотрены и классические, и квантовые корреляции (запутывание). Количество тепла, преобразованного в работу, пропорционально дефекту энтропии в начальном состоянии системы. Соотношение эквивалентности между информацией и работой явно демонстрируется для случая двухчастичных корреляций. Количество полученного тепла в расчете на частицу вдвое больше в случае запутывания, чем в случае классических корреляций.

1 Введение

Соотношение, связывающее работу и информацию, впервые дал Сциллард [1] при анализе ситуации с демоном Максвелла, а позже - Ландауэр [2] и Беннет [3]. Используя конфигурацию “мысленного эксперимента”, связанного с парадоксом Гиббса, было показано [4, 5, 6], что применительно к системе двух газов по N молекул в каждой, молекулы которых находятся в различных (в общем случае, неортогональных) квантовых состояний $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$, возможно полностью преобразовать в механическую работу некоторое количество тепла, взятое из термостата, которое пропорционально дефекту энтропии [7] системы

$$W = 2NkTI_0, \quad (1)$$

где W – работа, T – температура термостата, а I_0 – дефект энтропии (называемый также “квантовой информацией”, или “границей Левитина – Холево” [8, 9]) системы в расчете на молекулу, что в частном случае равно

$$I_0 = -\text{Tr } \rho \ln \rho + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \text{Tr } \rho^{(i)} \ln \rho^{(i)}, \quad \rho = \frac{1}{2}(\rho^{(1)} + \rho^{(2)}). \quad (2)$$

Дефект энтропии означает информацию (относительно микросостояния системы), ассоциированную с выбором субансамбля (в данном примере, $\rho^{(1)}$ или $\rho^{(2)}$) из полного ансамбля ρ .

Было выдвинуто предположение [4, 5, 6], что существует общее соотношение между информацией и работой; а именно, что располагая любой информацией J

относительно состояния физической системы, можно, позволив системе релаксировать к ее состоянию с максимальной энтропией, преобразовать в механическую работу количество тепла $W = kTJ$ без увеличения энтропии в окружающей среде. (Разумеется, вся информация J теряется в ходе этого процесса, поскольку система переходит в состояние теплового равновесия с той же самой энергией и тем же объемом, что и в исходном состоянии.)

С тех пор различным аспектам связей между информацией и работой было посвящено большое число работ (в частности, [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]). Однако общее соотношение эквивалентности до сих пор остается не доказанным. (Частично проблема, по нашему мнению, заключается в том, что остается расплывчатой граница между “механической работой” и “теплотой”.) Более того, все жизненные примеры извлечения работы из неравновесной системы (например, химические реакции, разделенные электрические заряды, сжатый газ), где осуществляется релаксация к состоянию равновесия, основаны на информации, содержащейся в одночастичных распределениях – как если бы все частицы, включенные в систему, были независимыми. Насколько нам известно, информация, заключенная в многочастичных распределениях, никогда не использовалась для извлечения механической работы.

Здесь мы обращаемся к проблеме использования информации, содержащейся в двухчастичных корреляциях, для преобразования тепла в работу. Наш анализ основан на двух важных допущениях:

1. Поскольку унитарное преобразование состояния системы не изменяет ее энтропии, оно может быть осуществлено без какой-либо диссипации энергии.
2. Поскольку ортогональные квантовые состояния полностью различимы, существуют перегородки, которые проницаемы для одного из таких состояний, но не для другого (хорошо известным примером такой “перегородки” является поляризационный фильтр).

Чтобы не зависеть от выбора определений (а это иногда имеет место в физической литературе), связанных с различием между работой и теплотой, мы будем рассматривать квазистатический изотермический процесс, в котором тепло отбирается из термостата и, в конечном счете, передается другой системе в форме, которая определено представляет собой механическую работу – а именно, подъем груза.

Мы рассмотрим случай двух частиц, связанных классической корреляцией, и случай квантовой корреляции в отдельных разделах, после чего обсудим общие результаты.

2 Случай классических корреляций

Рассмотрим газ из молекул, образованных двумя различными атомами А и В. С каждым атомом ассоциировано 2-мерное гильбертово пространство состояний с базисными векторами $|0\rangle$ и $|1\rangle$ (кубит, см. [18]). Тепловое равновесие (состояние с максимальной энтропией) газа из этих молекул описывается матрицей плотности

$$\rho = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2), \text{ with } \begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|), \\ \rho_2 &= \frac{1}{2}(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|). \end{aligned} \quad (3)$$

Состояния ρ_1 и ρ_2 ортогональны и (классически) соответствуют полностью коррелированным атомам А и В. Каждое из этих состояний обладает дефектом энтропии (в натах) $I_c = \ln 2$ на пару, или $J_c = N \ln 2$ для газа из N молекул. Заметим, что одночастичные вероятности состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$ обоих атомов те же для в состояниях ρ_1 и ρ_2 , что и при равновесии. Следовательно, невозможно различить эти состояния и состояние равновесия в базисе одночастичных измерений.

Без потери мощности предположим, что нам известно, что газ находится в состоянии ρ_1 (будем называть его газ 1). Предположим, что этот газ занимает сосуд объемом $2V$, разделенный перегородкой на две равные части объема V , в каждом из которых имеется по $N/2$ молекул, и находится в тепловом контакте с термостатом при температуре T . Применим к газу с правой стороны от перегородки унитарное преобразование $U_1 = I_A \otimes U_B$, где I_A – оператор тождественного преобразования в гильбертовом пространстве А, а U_B – оператор, который обменивает между собой состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ атомов газа В – то есть матрица Паули σ_x . Преобразование U переводит газ 1 в газ с матрицей плотности ρ_2 (газ 2).

Заменяем теперь перегородку двумя подвижными полупроницаемыми перегородками так, что перегородка, контактирующая с газом 1, проницаема для него, но не для газа 2, и наоборот для второй перегородки. Поскольку полное давление смеси газов больше давления в отсеках с каждым из газов, две перегородки начнут отталкиваться – и мы сможем использовать схему, представленную на рис. 1, для подъема грузов m_1 и m_2 .

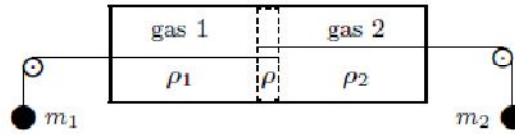


Рисунок 1: Схема получения работы за счет смешивания газов. Избыточное давление газов между полупроницаемыми перегородками расталкивает их и вынуждает поднимать грузы m_1 и m_2 .

Рассмотрим момент, когда правая перегородка смещена вправо и ограничивает объем $V+V_1$ газа 1, а левая перегородка смещена влево и ограничивает объем $V+V_2$ газа 2. Предположим, что газы – идеальные и достаточно разрежены. Тогда давления в левой, правой и центральной частях соответственно составят

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{(N/2)kT}{V+V_1}, \quad P_2 = \frac{(N/2)kT}{V+V_2}, \\ P_m &= \frac{NkT}{2} \left(\frac{1}{V+V_1} + \frac{1}{V+V_2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Работа, произведенная газом по подъему грузов в ходе этого квазистатического изотермического процесса, равна

$$W = \int_0^V (P_m - P_2) dV_1 + \int_0^V (P_m - P_1) dV_2 = NkT \ln 2. \quad (5)$$

Заметим теперь, что полная энергия системы не меняется. Таким образом, количество тепла, преобразованного в механическую работу, пропорционально дефекту энтропии системы

$$W_c = NkTI_c = kTJ_c. \quad (6)$$

В конце процесса весь сосуд окажется заполненным смесью газов 1 и 2 с матрицей плотности ρ . Начальная информация о положении каждой пары атомов, содержащаяся в корреляции состояний двух атомов молекулы, теперь оказывается уничтоженной, и этот рост энтропии в точности компенсирует уменьшение энтропии термостата.

3 Случай квантовых корреляций (запутывание)

Рассмотрим теперь случай, когда атомы, образующие молекулы, находятся в полностью запутанном состоянии. Имеется четыре таких состояния для двух кубитов, а именно состояния Белла [8] Φ^+ , Φ^- , Ψ^+ и Ψ^- , определенные следующим образом

$$\Phi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \Psi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle). \quad (7)$$

Эти четыре состояния ортогональны и образуют базис в 4-мерном гильбертовом пространстве тензорных произведений (in the 4-dimensional tensor-product Hilbert space) для этих двух атомов. Дефект энтропии этой системы в одном из таких состояний равен $I_e = 2 \ln 2$ в расчете на пару, или $J_e = 2N \ln 2$ для газа в целом (как и выше, мы полагаем газы идеальными, а состояния молекул независимыми).

Предположим, что вначале газ находится в состоянии Φ^+ . Тогда, используя то же самое преобразование U_1 , что и в предыдущем разделе, мы можем преобразовать половину молекул газа в состояние Ψ^+ . Используя такую же установку, что и на рис. 1, мы получаем работу $W_1 = NkT \ln 2$; конечное состояние газа будет смесью

$$\rho^{(1)} = \frac{1}{2}(|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|).$$

Теперь мы сможем выполнить унитарное преобразование $U_2 = U_\Phi \otimes U_\Psi$, где U_Φ – унитарное преобразование, переставляющее Φ^+ и Φ^- в подпространстве, охватываемом этими ортогональными состояниями, и U_Ψ аналогично охватывает Ψ^+ и Ψ^- . Преобразование U_2 преобразует $\rho^{(1)}$ в смешанное состояние

$$\rho^{(2)} = \frac{1}{2}(|\Phi^-\rangle\langle\Phi^-| + |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|). \quad (8)$$

Заметим, что состояния $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$ ортогональны и, таким образом, полностью различимы.

Используя преобразование U_2 , с помощью такой же установки, как и прежде, мы можем теперь повторить процедуру смешивания. Это даст дополнительную работу $W_2 = NkT \ln 2$, тогда как система переходит в состояние равновесия

$\rho = \frac{1}{2}(\rho^{(1)} + \rho^{(2)})$. Следовательно, полное количество тепла, преобразованного в работу, равно

$$R_e = R_1 + R_2 = 2NkT \ln 2 = NkTI_e = kTJ_e. \quad (9)$$

Поскольку дефект энтропии запутанных состояний в два раза больше, чем для классически коррелированных состояний, количество работы W_e также превышает R_e в два раза.

4 Выводы

Вышеприведенные результаты демонстрируют соотношение эквивалентности между информацией и работой для случая, когда информация заключена только в двухчастичных распределениях вероятностей и не может быть извлечена из простого одночастичного распределения.

Ситуация с эквивалентностью между информацией и работой в общем случае остается неясной и зачастую парадоксальной. С одной стороны, многие исследователи твердо убеждены в этом и выражают это различными формулировками, например: “Информация имеет энергетический смысл: она может быть преобразована в работу (Information has an energetic value: It can be converted into work)” (Zurek[19]; но см. [17]). (На самом деле, в работу может преобразована не информация, а теплота с использованием информации.) С другой стороны, по нашему мнению, отсутствует общепризнанное доказательство того, что любой вид информации может быть столь же успешно использован для преобразования тепла в работу любого типа. Нам кажется, что корень проблемы заключается в том, что, несмотря на многие бесспорные примеры “работы”, известные физикам, не существует общего строгого определения, которое позволило бы провести различие между этими двумя видами передачи энергии – теплоты и работы.

Говоря неформально, работа – это передача энергии с учетом информации (work is an “informed” transfer of energy), т.е. такая передача, при которой нам точно известно изменение состояния каждой степени свободы, происходящее в ходе этой передачи; в то же время теплота – это энергия, при передаче которой мы такими сведениями не располагаем. С этой точки зрения эквивалентность между информацией и работой оказывается на самом деле тавтологией. Однако строгая формулировка этих идей пока не представлена.

5 Благодарности

Мы хотели бы поблагодарить Charles Bennett за привлечение нашего внимания к ряду соответствующих публикаций, и Oscar Dahlsten и Michal Horodecki за корректирующие ссылки.

Ссылки

[1] Szilard, Leo, “?Uber die entropieverminderung in einem thermodynamischen system bei eingriffen intelligenter wesen” (“On the decrease of entropy in a thermodynamic system by the intervention of intelligent beings”), Z Phys 53 (1929), 840–856.

[2] Landauer, Rolf, “Irreversibility and heat generation in the computing process,” IBM J Res. Devel. 5 (1961) 183–191.

- [3] Bennett, Charles H, "The thermodynamics of computation—a review," *Int. J Theor. Phys.* 21 (1982), 905–940.
- [4] Levitin, Lev B, "Quantum amount of information and maximum work," *Proc. 13th IUPAP Conf. Stat. Phys.* (sc D Cabile, DG Kuper, and I Riess, eds.), Bristol (England), A Hilger 1978.
- [5] Levitin, Lev B, "Information theory for quantum systems," in *Information, Complexity, and Control in Quantum Physics*, (S Diner and G Lochak, eds.), Springer 1987, 15–47.
- [6] Levitin, Lev B, "Gibbs' paradox and equivalence relation between quantum information and work," in *Proc. Worksh. on Physics and Computation (PhysComp'92)*, IEEE Comp. Soc. 1993, 223–226.
- [7] Levitin, Lev B, "On the quantum measure of the amount of information," in *Proc. 4th National Conf. on Information Theory*, Tashkent, USSR, 1969, 111–116. English translation: *Ann. Fond. de Broglie* 21 (1996), 345–348.
- [8] Bennett, Charles H, and Peter Shor, "Quantum information theory," *IEEE Trans. Info. Theory* 44 (1998), 2724–2742.
- [9] Peres, Asher, *Quantum Theory, Concepts and Methods*, Kluwer 1993.
- [10] Alicki, Robert, Michal Horodecki, Pawel Horodecki, and Ryszard Horodecki, "Thermodynamics of quantum informational systems—Hamiltonian description," *Open Syst. Info. Dyn.* 11 (2004), 205–217
- [11] Dahlsten, Oscar, Renato Renner, Elizabeth Rieper, and Vladko Vedral, "The work value of information," *ArXiv:quant-ph/0908.0424* (2009).
- [12] Feldmann, Tova, and Ronnie Kosloff, "Quantum forustroke engine: Thermodynamic observables in a model with intrinsic friction," *Phys. Rev. E* 68 (2003), 016101.
- [13] Horodecki, Michal, Jonathan Oppenheim, and Ryszard Horodecki, "Are the laws of entanglement theory thermodynamical?" *Phys. Rev. Lett.* 89 (2002), 240403.
- [14] Lloyd, Seth, "Quantum- mechanical Maxwell's demon," *Phsy. Review A* 56 (1997), 3374–3382.
- [15] Oppenheim, Jonathan, Michal Horodecki, Pawel Horodecki, and Ryszard Horodecki, "A thermodynamic approach to quantifying quantum correlations," *PRL* 89 (2002), 180402.
- [16] Scully, Marlan, "Extracting work from a single thermal bath via quantum negentropy," *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001), 220601.
- [17] Zureck, Wojciech, "Quantum discord and Maxwell's demons," *Phys. Rev. A* 67 (2003), 012320.
- [18] Schumacher, Benjamin, "Quantum coding," *Phys. Rev. A* 51 (1995), 2738–2747
- [19] Zureck, Wojciech, "Quantum discord and Maxwell's demons," *ArXiv:quant-ph/0202123* (2002).