Гравитация как поле в планковском пределе

Петр Огоновский и Петр Скиндзер (Польша)

Перевод М.Х. Шульмана (shulman@dol.ru, www.timeorigin21.narod.ru)

Document draft, April 21, 2013

Gravity as field in the Planck limit.

Piotr Ogonowski¹ and Piotr Skindzier^{2}*

* Corresponding author E-mail: piotr.skindzier@uj.edu.pl

¹ Leon Kozminski Academy, ul. Jagiellonska 57, 03-301 Warsaw, Poland

² WFAiS Jagiellonian University, ul. Reymonta 4, 30-059 Krakow, Poland

Показано, что разложение Героха (Geroch decomposition) приводит нас к определению сходного с максвелловским представления гравитации в (3+1)-метрическом разложении. Из такого разложения мы получаем скалярное поле, которое может быть ответственным за гравитационное взаимодействие. Мы используем это поле, чтобы предложить новый подход к квантованию гравитации, что дает собственные квантовые значения.

Ключевые слова. Общая Теория Относительности, Гравитация, Квантовая Гравитация, Уравнения Максвелла

1 Введение

Существуют известные скалярные теории гравитации в плоском пространстве-времени [1], объясняющие гравитацию как взаимодействие между телами. За последние 50 лет многие из них стали рассматриваться в качестве альтернатив классической общей теории относительности (ОТО). Во всех таких подходах их авторы пытаются расширить гравитацию на планковский предел. Главной проблемой при этом, по нашему мнению, оказывается эффективное квантование в этих теориях. В нашем подходе предлагается сначала расширить классическую ОТО на планковский предел в (3+1)-представлении, а затем квантовать ее классическим и ковариантным способом.

В первой части мы показываем, что разложение Героха (Geroch decomposition) для сферически симметричного случая открывает новый путь для понимания искривленного пространства-времени как эффекта локального взаимодействия в плоском пространстве-времени. В этой перспективе гравитация описывается эффективным скалярным полем $\Phi = 1/\gamma_r$, которое может быть интерпретировано – при наивном подходе – как гравитационное расширение времени, действующее на плоское пространство-время.

Во второй части настоящей статьи мы показываем, что Φ может также служить нам для описания классического электромагнитного поля. Показано, что в бесконечном пределе мы имеем возможность восстановить электромагнитные уравнения в классическом и ковариантном виде.

В третьей части статьи показывается, как можно квантовать поле Φ , чтобы получить собственную массу покоя, энергию фотона и кулоново-подобный потенциал для элементарных зарядов.

Мы надеемся, что данный подход может привести к важным последствиям для нашего понимания пространства-времени в нулевом пределе, пролить новый свет на квантовые теории гравитации и открыть новые сферы исследований и обобщений.

2 Локальное окружение в пространстве-времени Минковского как скалярное поле.

2.1 Векторные поля Киллинга

В начале напомним правило суммирования Эйнштейна по повторяющимся индексам.

Запятая обозначает частную производную:

$$\varphi_{,\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \quad (1)$$

Точка с запятой означает ковариантную производную:

$$\nabla_\mu X^\alpha = X^\alpha_{;\mu} = X^\alpha_{,\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} X^\nu \quad (2)$$

где Γ – коэффициенты связности. Мы выбираем сигнатуру метрики $(-, +, +, +)$.

Уравнение геодезической:

$$0 = \frac{dx^\mu}{d\tau} \left[\left(\frac{dx^\alpha}{d\tau} \right)_{,\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] \quad (3)$$

утверждает, что ковариантная производная частицы для 4-скорости частицы

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (4)$$

исчезает вдоль нее:

$$0 = \nabla_\mu u^\alpha = u^\mu u^\alpha_{;\mu} = \frac{dx^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (5)$$

Здесь τ - аффинный параметр, который является собственным временем для времениподобных геодезических. На пространстве векторное поле Киллинга [2] генерирует изометрию пространства-времени. В общем случае это требует решения уравнения

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0 \quad (6)$$

но в случае системы координат, в которой метрические коэффициенты независимы от координат, векторное поле этой координаты автоматически является полем Киллинга.

Для геодезической оно определяет интеграл движения, поскольку

$$\nabla_{\mu} (u^{\mu} \cdot \xi) = u^{\nu} (u^{\mu} \xi_{\mu})_{;\nu} = 0 \quad (7)$$

$$u^{\nu} u^{\mu}_{;\nu} \xi_{\mu} + u^{\nu} u^{\mu} \xi_{\mu;\nu} = 0 \quad (8)$$

первый член равен нулю в силу уравнения для геодезической, а второй член – в силу антисимметрии $\xi_{\mu;\nu}$.

Для введения полей Киллинга нам требуется выбрать метрику, для которой мы можем найти по крайней мере один вектор ξ_{μ} . Для простоты введем пространство-время Шварцшильда:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (9)$$

Мы видим, что метрический коэффициент $\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)$ не зависит от времени t и от φ , так что ∂_t и ∂_{φ} являются полями Киллинга.

В координатах Шварцшильда мировая линия частицы характеризуется 4-скоростью

$$u^{\mu} = \left[\frac{dt}{d\tau}, \frac{dr}{d\tau}, \frac{d\theta}{d\tau}, \frac{d\varphi}{d\tau} \right] \quad (10)$$

так что для t :

$$\xi^{\mu} = [1; 0; 0; 0] \quad (11)$$

мы получаем скалярное произведение

$$-e_0 = g_{\mu\nu} \xi^{\mu} u^{\nu} = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \quad (12)$$

и аналогично для φ :

$$\xi^{\mu} = [0; 0; 0; 1] \quad (13)$$

Мы имеем

$$l = e_{\varphi} = g_{\mu\nu} \xi^{\mu} u^{\nu} = r^2 (\sin^2 \theta) \frac{d\varphi}{d\tau} \quad (14)$$

Физический смысл состоит в том, что e_0 и l сохраняют удельные (на единицу массы) энергию и азимутальный угловой момент частицы на бесконечности, соответственно.

Мы должны также отметить, что эта энергия релятивистская, так что для свободного падения от покоя на бесконечности (со скоростью отрыва) мы имеем $e_0 = 1$.

2.2 Разложение Героха

Применим разложение Героха [3] для выбранного пространства-времени Шварцшильда в сферически симметричном случае и обсудим его результаты. Чтобы упростить интерпретацию, мы не будем использовать формализм ADM [4] специально для этого случая, однако он может быть полезным для будущих обобщений.

Метрика Шварцшильда является некоторой асимптотикой плоского пространства-времени с времениподобным полем вектора Киллинга $\mu = [1; 0; 0; 0]$ с квадратической нормой

$$\lambda = -\xi^\mu \xi_\mu \quad (15)$$

и кручением

$$\omega_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\delta} \xi^\nu \nabla^\rho \xi^\delta \quad (16)$$

Используя тензор

$$\gamma_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu} + \xi_\mu \xi_\nu \quad (17)$$

можно придать метрике пространства-времени вид:

$$ds^2 = -\lambda \left(dt - \omega_i dx^i \right)^2 + \frac{\gamma_{ij}}{\lambda} dx^i dx^j \quad (18)$$

3 Подобное максвелловскому представление гравитации в (3+1) разложении метрики

3.1 Представление разложения Героха

Перепишем метрику (18) в раскрытом виде:

$$ds^2 = -\lambda dt^2 + 2\lambda \omega_i dt dx^i - \left(\lambda \omega_i \omega_j + \frac{\gamma_{ij}}{\lambda} \right) dx^i dx^j \quad (19)$$

Это – метрика типа:

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + 2g_{0i} dt dx^i + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (20)$$

Согласно общим соглашениям введем:

$$h \equiv g_{00} = -\lambda \quad (21)$$

$$g_\alpha \equiv -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} = -2\lambda \omega_i \quad (22)$$

$$Y_{\alpha\beta} \equiv -g_{\alpha\beta} + h g_\alpha g_\beta = -\left(\frac{\gamma_{ij}}{\lambda} + \lambda \omega_i \omega_j \right) \quad (23)$$

С помощью таких определений мы можем ввести уравнения, подобные максвелловским, в (3+1)-виде

$$F_{[ik;l]} = 0 \quad (24)$$

В более классическом виде:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (25)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{\Upsilon} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\Upsilon} \mathbf{B}) \quad (26)$$

Для лучшего понимания запишем:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_a (\sqrt{-g} F^{ab}) = 0 \quad (27)$$

следовательно, уравнения, подобные максвелловским, могут быть переписаны как:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (28)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{1}{\Upsilon} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\Upsilon} \mathbf{D}) \quad (29)$$

где:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{h}} + \mathbf{H} \times \mathbf{g} \quad (30)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{h}} + \mathbf{g} \times \mathbf{E} \quad (31)$$

Метрика Шваршильда является статической, и ее компоненты не зависят от времени, так что мы можем переписать подобные максвелловским уравнения в виде:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (32)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (33)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{E}}{\sqrt{h}} \right) = 0 \quad (34)$$

$$\nabla \times \sqrt{h} \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (35)$$

$$(36)$$

Вышеприведенные уравнения действуют подобно максвелловским уравнениям, где скорость распространения волны равна

$$V_w = \sqrt{h} = c \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \quad (37)$$

Теперь легко показать, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_w = c \quad (38)$$

3.2 Распространяющиеся возмущения изометрии пространства-времени

Вектор Киллинга X^b по определению удовлетворяет:

$$g^{bc} X_{c;ab} - R_{ab} X^b = 0 \quad [5, \text{p. 443; C.3.9}] \quad (39)$$

$$X_{a;bc} = R_{abcd} X^d \quad [5, \text{p. 443; C.3.6}] \quad (40)$$

$$X^a{}_{;b} + R^a_c X^c = 0 \quad (41)$$

Таким образом, для введенного поля Киллинга мы имеем:

$$R^a_{\beta\gamma\sigma} \xi^\sigma = \xi^{\sigma}{}_{;\beta;\gamma} \quad (42)$$

Следовательно:

$$\xi^i{}_{\alpha;\beta} = -R_{\alpha\beta} \xi^{\beta} \quad (43)$$

так что времениподобное поле Киллинга тесно связано с кривизной пространства-времени. Определяя подходящую величину F и используя собственное определение полей Киллинга

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0 \quad (44)$$

получаем

$$F_{\alpha\beta} = \xi_{[\beta;\alpha]} = \frac{1}{2} (\xi_{\beta;\alpha} - \xi_{\alpha;\beta}) = -\xi_{\alpha;\beta} \quad (45)$$

следовательно

$$F^i{}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} \xi^{\beta} \quad (46)$$

Это кажется похожим на стандартный тензор электромагнитного поля

$$F_{\alpha\beta}^{\cdot\beta} = A_{\beta;\alpha} - A_{\alpha;\beta} \quad (47)$$

который связан с 4-током J из максвеловских уравнений

$$F_{;\beta}^{\alpha\beta} = 4\pi J^{\alpha} \quad (48)$$

В вакууме тензор Риччи исчезает, и поле Киллинга ξ становится похожим на электромагнитный 4-потенциал A , который используется в электромагнетизме в свободных от источников областях, в лоренцовой калибровке

$$A_{;\alpha}^{\alpha} = 0 \quad (49)$$

что автоматически удовлетворяется подобно уравнениям Максвелла. Физический смысл тензора F должен состоять в объяснении распространения анизотропии пространства-времени.

3.3 Волновые уравнения, подобные уравнениям Максвелла

3.3.1 Гравитация как волновое уравнение в пространстве-времени Минковского

Последуем [6] и рассмотрим регулярное плоское пространство-время Минковского. Определим скалярные потенциалы:

$$\Phi = \frac{1}{\gamma_r} = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \quad (50)$$

$$\Theta = r \cdot \beta_r = r \sqrt{\frac{r_s}{r}} \quad (51)$$

Мы определяем следующее векторное поле (где $\hat{e}$ - направляющие версоры):

$$\mathbf{T} = c\Phi \cdot \hat{e}_y \quad (52)$$

$$\mathbf{A} = -\nabla c\Phi \times \hat{e}_y = -\nabla \times \mathbf{T} \quad (53)$$

$$\mathbf{U} = \nabla c\Theta \times \hat{e}_x \quad (54)$$

$$\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{U} = \frac{d\hat{e}_y}{dt} \quad (55)$$

Используя соотношения между вышеупомянутыми полями, получаем:

$$\frac{\gamma_r}{c} \cdot \frac{dT}{dt} = \frac{\gamma_r}{c} \frac{c}{\gamma_r} \cdot \frac{d\hat{e}_y}{dt} = \Omega \quad (56)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{\gamma_r}{c} \cdot \frac{d\Omega}{dt} \quad (57)$$

После простых преобразований выводим даламбертиан:

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (58)$$

или, что то же:

$$\frac{\gamma_r^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (59)$$

Мы получили волну того же типа, что (37). С учетом соответствующего множителя вышеприведенный даламбертиан должен быть эквивалентен уравнению для электромагнитной волны.

Заметим, что при нашем описания течения времени (t) соответствующая ось ортогональна пространственной оси, но действует подобно вращающемуся полю. Следовательно, мы еще можем рассматривать то и другое как пространство-время, где пространство и время ортогональны.

3.3.2 Интерпретация подобного максвелловскому представлению метрики

Мы построили времениподобное поле Киллинга, что означает, что мы имеем дело со стационарным пространством-временем. Теперь предположим, что поле Киллинга не вращается:

$$\omega_i = 0 \quad (60)$$

Тогда пространство-время статично, и наблюдатели Киллинга (4-скорости, параллельные времениподобному полю Киллинга) также статичны, поскольку:

$$dx^\mu = 0 \quad (61)$$

Пронормируем собственную 4-скорость:

$$u^\mu = \lambda^{-1/2} \xi^\mu \quad (62)$$

Таким образом

$$\lambda_{Schwarzschild}^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} = \gamma_r \quad (63)$$

Мы видим, что эта величина является обратной к нормировке нашего времениподобного поля Киллинга. Неинвертированная величина $\lambda^{1/2}$ оказывается гравитационным красным смещением.

4-ускорение наблюдателей Киллинга дается ковариантной производной, в нашем статичном случае эта величина упрощается до:

$$a^\mu = U^{i\mu} = g^{\mu\nu} (\log \lambda^{1/2})_{,\nu} \quad (64)$$

В случае Шварцшильда r -компонента исчезает, и мы можем получить:

$$\partial_r \hat{e}_r = \partial_r \left(\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \partial_r \right) \quad (65)$$

что дает:

$$a^r = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{1}{2} \frac{r_s}{r^2} \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} = \frac{r_s}{2r^2} \quad (66)$$

Таким образом

$$a = \frac{r_s}{2r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} \hat{e}_r = g_r \hat{e}_r \quad (67)$$

т.е. правильное гравитационное ускорение: собственное ускорение наблюдателей Киллинга равно g_r в наружном радиальном направлении.

Разумеется, это только концептуальная интерпретация нашего (3+1)-разложения метрики Шварцшильда. Теперь мы должны подчеркнуть, что в зависимости от системы координат мы можем получить иную интерпретацию гравитации в псевдоклассическом представлении.

3.4 Действие скалярного поля

Проверим наш подход. На гиперсфере $t=0$ симметрия пространства-времени при инверсии времени означает, что внешняя кривизна равна нулю, и в этом случае уравнения Гаусса-Кодацци упрощаются до:

$$R_{bcd}^a = {}^h R_{bcd}^a \quad (68)$$

$$R_{bcd}^0 = 0 \quad (69)$$

$$R_{ioj}^0 = -{}^h U_{;i;j} - ({}^h U_{;i}) ({}^h U_{;j}) \quad (70)$$

где верхний индекс h обозначает, что эта величина берется вдоль пространственного гиперслоя и должна вычисляться с использованием только пространственной метрики h .

Сворачивая все до скаляра Риччи, получаем:

$$R = {}^h R - 2 \left[{}^h U_{;i}^{;i} + ({}^h U^{;i}) ({}^h U_{;i}) \right] \quad (71)$$

Первый член в квадратных скобках представляет собой лапласиан

$$2U = \log \lambda \quad (72)$$

а метрический детерминант равен

$$g = -\lambda h = -\gamma \quad (73)$$

так что в терминах нашей метрики:

$$\gamma_{ij} \left(\frac{1}{\lambda} \right) h_{ij} \quad (74)$$

представление действия Эйнштейна-Гильберта есть

$$S \propto \int R \sqrt{-g} \quad (75)$$

$$S = \int \left(\gamma R - \gamma \nabla^2 (\log \lambda) - \frac{1}{2} \frac{\gamma_{ij} d\lambda^i d\lambda^j}{\lambda^2} \right) \sqrt{\gamma} \quad (76)$$

Мы получили строгий результат.

Таким образом, мы показали, что в разложении Героха метрики Шварцшильда мы можем рассматривать гравитацию как среду, которая изменяет скорость света в максвелло-подобном представлении гравитации, но, разумеется, в локальной системе координат скорость света по-прежнему остается постоянной и равной c .

Этот анализ приводит нас к заключению, что после разложения Героха мы можем рассматривать гравитацию не только как кривизну пространства-времени, но также и как некоторое поле $\Phi = \sqrt{h} = 1/\gamma_r$. Разумеется, это представление гравитации мы можем получить только в (3+1) разложении Герлоха. Но это означает, что в представлении Герлоха гравитация оказывается максвелло-подобным полем, и уравнения движения этого поля зависят от того, какую систему координат мы выбираем.

Мы должны отдавать себе полный отчет в этом свойстве гравитации. Если мы пытаемся интерпретировать ее как некоторое поле в 4 или (3+1) измерениях, мы должны сначала решить, какова метрика, и в какой системе координат мы рассматриваем эту метрику. В рамках наивного подхода мы можем сказать, что:

- выбор метрики эквивалентен выбору поля (законы сохранения),
- выбор системы координат эквивалентен выбору уравнений движения (динамические уравнения).

4 Квантовое представление скалярного поля Φ

Как было показано, интерпретация нашей проблематики зависит от выбора не только метрики, но и координатной системы. Данное замечание является нашим первым условием, если мы хотим проквантовать классическое поле, представленное в разделе 3.

Выбора действия для этого поля, описанного в подразделе 3.4, недостаточно. Чтобы проквантовать гравитацию, нам следует ввести гамильтониан в специфической координатной системе, для которой будет ясно, как аналогично классической процедуре мы сможем осуществить процесс квантования.

До сих пор было не ясно, как выбрать гамильтониан способом, который дал бы нам уравнение движения в операторной форме и волновую функцию, которую легко можно было бы интерпретировать в рамках Копенгагенской интерпретации.

При первом подходе мы как раз используем действие для определения гамильтониана в форме, где пространство и время разделены в линейном виде, после чего выполним квантование.

При втором подходе мы запишем гамильтониан в ковариантной форме и выберем условие для метрики, что даст нам уверенность в том, что наше уравнение движения окажется хорошо определенным.

Попытаемся теперь показать, как эти два различных подхода работают и какие результаты дают.

4.1 Классическое квантование – первый подход

Из уравнения (76) мы можем вывести, что гравитационное действие для статического пространства-времени эквивалентно действию для 3-мерного пространственноподобного представления, минимально связанного со скалярным полем $\Phi = 1/\gamma_r$. Определим лагранжиан и гамильтониан для этой ситуации. Как мы знаем, по определению:

$$H = \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L = \sum_i \dot{x}_i p_i - L \quad (77)$$

Для некоторого пробного тела с массой покоя " m ", движущегося в плоском 3-мерном пространстве должно быть:

$$\sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = v \cdot m v \gamma = m c^2 \beta^2 \gamma \quad (78)$$

где

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (79)$$

Определим также нулевое измерение (ось времени) и получим:

$$\dot{x}_0 p_0 = -v_r \cdot m v_r \gamma_r = -m c^2 \beta_r^2 \gamma_r \quad (80)$$

Теперь, используя определение (77), с помощью простых вычислений мы можем определить собственный лагранжиан и гамильтониан для ($\mu = 0, 1, 2, 3$) в виде:

$$L = mc^2 \frac{1}{\gamma_r} - mc^2 \frac{1}{\gamma} \quad (81)$$

Гамильтониан получаем в виде:

$$H = \sum_{\mu} \dot{x}_{\mu} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\mu}} - L. \quad (82)$$

После преобразования:

$$H = mc^2 \gamma - mc^2 \gamma_r \quad (83)$$

Для сопоставления с ньютоновым приближением перепишем в виде:

$$H = mc^2(\gamma - 1) - V(r) \quad (84)$$

где

$$V(r) = mc^2(\gamma_r - 1) \quad (85)$$

Теперь мы можем последовать методу Шрёдингера, аппроксимируя кинетическую энергию и выражая ее через импульс в классической форме:

$$H = \frac{p^2}{2m} - V(r) \quad (86)$$

Мы также можем попытаться воспроизвести релятивистское уравнение Дирака, однако для нашего анализа приближение Шрёдингера кажется вполне достаточным. Мы имеем хорошо определенный приближенный гамильтониан, который мы можем легко проквантовать с помощью соотношения:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H} \Psi \quad (87)$$

что дает:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, t) = \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - V(r) \right] \Psi(r, t) \quad (88)$$

где использовали определение:

$$p = -i\hbar \nabla \quad (89)$$

Как можно заметить, это квантовое уравнение сходно с уравнением Шрёдингера.

В этой классической форме уравнения мы можем интерпретировать волновую функцию Ψ классическим способом и рассматривать ее квадрат как вероятность обнаружить частицу.

Здесь важно показать, что, используя разложения Маклорена, мы в пределе получаем:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = mc^2 \left(0 - \frac{r_s}{2r} - \frac{3r_s^2}{8r^2} + O\left(\left(\frac{1}{r}\right)^3\right) \right) \quad (90)$$

В этом предельном выражении для потенциала мы можем легко увидеть, что в нулевом приближении мы получаем свободно движущуюся частицу с массой m . В первом приближении получаем частицу, взаимодействующую со скалярным полем типа $1/r$.

Мы видим, что при вышеупомянутом квантовом подходе гравитация в первом приближении действует на частицу как скалярное поле и может создать ненулевое базовое состояние со стабильной конфигурацией.

Масса частицы может стремиться к нулю в пределе массы Планка. В этом случае мы получаем вакуумное решение нашего квантового уравнения с виртуальной частицей, чья эффективная масса будет больше нуля, но в общем случае отличной от планковской массы.

Следовательно, важно показать, что при вычислении пределов $V(r)$ для планковских масштабов мы получаем (в результате маклореновского разложения) правильное приближение для массы покоя, ньютоновского гравитационного потенциала, энергии фотона и электростатического подобного кулоновому потенциалу двух элементарных зарядов.

4.1.1 Приближение для массы покоя и ньютоновского предела потенциала

При $r_s \ll l_p$ мы вычисляем:

$$\lim_{m \rightarrow m_p; r \rightarrow l_p} V(r) = \quad (91)$$

$$= m_p c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{l_p}}} - 1 \right) \approx m_p \cdot \frac{c^2 r_s}{2l_p} = \frac{c^4 r_s}{2G} = M c^2 \quad (92)$$

Мы получили величину, которая может быть интерпретирована как некоторая энергия покоя (некоторая масса покоя M), соответствующая данному радиусу Шварцшильда.

Мы получаем ньютоновский предел гравитационного потенциала в приближении:

$$V(r) = mc^2 (\gamma_r - 1) \approx m \frac{c^2 r_s}{2r} = G \frac{mM}{r} \quad (93)$$

4.1.2 Приближение для энергии фотона

При $r \gg l_p$ мы вычисляем:

$$\lim_{m \rightarrow m_p; r_s \rightarrow l_p} V(r) = \quad (94)$$

$$= m_p c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{l_p}{r}}} - 1 \right) \approx m_p c^2 \frac{l_p}{2r} = \frac{1}{2} \hbar \omega \quad (95)$$

где на основании вращения, описанного в подразделе (3.3.1), мы можем вывести:

$$\omega = \frac{c}{r} = \frac{2\pi}{T} \quad (96)$$

Как видим, рассматривая вращающуюся пару вышеуказанных частиц со скоростью "с", мы получаем правильное приближение для энергии фотона. Мы должны заметить, что формула для вышеуказанной энергии гипотетического фотона может быть проверена для колебаний, близких к планковским колебаниям $\omega_p = 1/t_p$, если интерпретировать планковские колебания ω_p как предел.

Пока мы рассматриваем в квантовой механике фотон, описываемый общепринятой формулой для энергии, мы получаем известные проблемы при планковских масштабах длины, которые имеют жизненное значение для квантовой космологии и для усилий по великому объединению [7].

Но введенная нами формула, основанная на (95), не утрачивает смысла при планковских масштабах, поскольку выражение $\hbar\omega$ справедливо только при малых энергиях.

4.1.3 Подобное кулоновому элементарное зарядовое взаимодействие

Мы можем описывать взаимодействие элементарных зарядов с помощью формулы:

$$\lim_{m \rightarrow m_p; r_s \rightarrow l_p / 2\pi} V(r) \cdot (\gamma_r - 1) = \quad (97)$$

$$= m_p c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{l_p}{2\pi r}}} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{l_p}{2\pi r}}} - 1 \right) \approx \quad (98)$$

$$\approx E_p \cdot 4\pi\alpha \cdot \frac{l_p}{4\pi r} \approx \frac{\hbar c}{r} \cdot \alpha \quad (99)$$

где α - постоянная тонкой структуры. Таким способом мы получили электростатический потенциал для элементарных зарядов, выраженный в естественных единицах.

В этом месте мы должны указать, что рассматриваемый здесь предел в действительности является взаимодействием между полями $V(r) \frac{V(r)}{mc^2}$, которые могут быть интерпретированы как первое приближение для взаимодействия между двумя частицами. Это показывает, что на самом деле мы можем получить естественным образом приближение для постоянной тонкой структуры, если мы вводим взаимодействие между двумя частицами и рассматриваем его в первом приближении.

4.2 Ковариантное квантование – второй подход

Как было показано в подразделе 4.1, мы можем установить квантовомеханические уравнения для гравитации, если мы выбираем метрику специальным образом. На следующем этапе мы сконструируем гамильтониан и проквантуем его классическим образом. Мы еще не всегда можем быть уверенными, что вид нашей метрики дает нам гамильтониан, из которого мы можем получить квантовые уравнения, которые будут легко интерпретированы с использованием Копенгагенской [8] интерпретации волновой функции.

Это замечание приводит нас ко второму подходу к квантованию. При этом подходе мы должны отметить, что естественная интерпретация волновой функции является простой для декартовой метрики или метрики Минковского. Для обоих этих пространств мы имеем хорошо определенные переменные времени и пространства, которые разделены и не имеют сингулярностей, которые являются артефактами координатной системы. Для этой метрики волновая функция является хорошо определенной.

Если мы пытаемся ввести квантование для другой метрики, мы начнем с проблемы точного определения собственного времени, разделения между переменными пространства и времени, артефакта сингулярностей.

Когда мы пытаемся квантовать метрику в виде уравнения (9), мы имеем хорошее определение и разделение переменных пространства и времени, но как легко можно видеть, мы имеем сингулярность при значении $r = r_s$, которое не соответствует источнику поля.

Эта проблема хорошо известна как минимум в течение 100 лет и была решена Эддингтоном в 1924 году [9]. Он предложил преобразование к изотропным координатам:

$$r = r_1 \left(1 + \frac{GM}{2c^2 r_1} \right)^2 \quad (100)$$

$$r_1 = \frac{r}{2} - \frac{GM}{2c^2} + \sqrt{\frac{r}{4} \left(r - \frac{2GM}{c^2} \right)} \quad (101)$$

и метрика принимает вид:

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{GM}{2c^2 r_1} \right)^2}{\left(1 + \frac{GM}{2c^2 r_1} \right)^2} c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{GM}{2c^2 r_1} \right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (102)$$

Как может быть показано, в этой координатной метрике мы имеем только одну сингулярность при значении $r = 0$, которая имеет физический смысл, т.к. там находится источник поля.

Мы должны сформулировать, что метрика, которую мы выбрали в подразделе 4.1, была первой верификацией, которая может быть переписана как волновое уравнение (см. подраздел 3.3.1). Разумеется, не всегда речь идет о любой метрике, которую мы выбрали. Кроме того, мы хотели бы иметь некоторый порождающий метод для квантования метрики, который имел бы простую физическую интерпретацию.

Утверждение 1. Мы можем квантовать гравитацию, если метрика удовлетворяет всем следующим свойствам:

- время имеет собственную локальную интерпретацию
- $g_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$, где $i, j = 0, \dots, 3$
- сингулярности соответствуют только точкам с источником поля

Для такого выбора метрики мы можем принять гамильтониан в ковариантной форме [10]

$$H = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta \quad (103)$$

и квантовать его в виде

$$H = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \widehat{p}_\alpha \widehat{p}_\beta \quad (104)$$

Мы принимаем представление для квантования 4-импульса в виде:

$$\widehat{p}_\alpha = (\hat{E}, \hat{\mathbf{p}}) = (i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}) \quad (105)$$

Это приводит нас к правилу коммутации:

$$\{p^\mu, p_\nu\} = const. \delta_\nu^\mu$$

Для этого мы можем определить уравнение в виде:

$$\frac{Dp^\xi}{dt} = \{H, p^\xi\} + \frac{\partial p^\xi}{\partial t} \quad (106)$$

Это уравнение по определению мы можем переписать более просто:

$$\frac{Dp^\xi}{dt} - \frac{\partial p^\xi}{\partial t} = \{H, p^\xi\}$$

и, упрощая далее, получим:

$$\Gamma_{\xi 0}^\mu p_\mu + \{H, p^\xi\} p^\xi = 0 \quad (107)$$

что можно также представить в квантовой форме как:

$$\Gamma_{\xi 0}^{\mu} \widehat{p}_{\mu} \Psi + \{H, \widehat{p}^{\xi}\} \widehat{p}^{\xi} \Psi = 0 \quad (108)$$

Это дает нам:

$$\Gamma_{\xi 0}^{\mu} \widehat{p}_{\mu} \Psi + c \widehat{p}^{\xi} \widehat{p}^{\xi} \Psi = 0 \quad (109)$$

Для нашей метрики мы получаем два уравнения:

$$\Gamma_{10}^0 \widehat{p}_0 \Psi + c \widehat{p}^1{}^2 \Psi = 0$$

$$\Gamma_{00}^1 \widehat{p}_1 \Psi + c \widehat{p}^0{}^2 \Psi = 0$$

что можно переписать в виде:

$$\Gamma_{10}^0 g_{00} \widehat{p}^0 \Psi + c \widehat{p}^1{}^2 \Psi = 0$$

$$\Gamma_{00}^1 g_{11} \widehat{p}^1 \Psi + c \widehat{p}^0{}^2 \Psi = 0$$

Здесь мы видим, что $\Gamma_{10}^0 g_{00} = -\Gamma_{00}^1 g_{11}$, и, если мы добавим эти два уравнения, то получим:

$$\widehat{p}^1{}^2 \Psi + \widehat{p}^0{}^2 \Psi = 0 \quad (110)$$

Это – очевидное волновое уравнение. В таком представлении гравитация может пониматься как свободная волновая функция безмассовой частицы.

По нашему мнению, только экстремальное поле или взаимодействие между двумя массивными частицами может создавать в этом представлении эффективную массу частицы, которая имеет гравитационную массу в классическом представлении.

Это не должно быть сюрпризом для нас. Мы рассматриваем наше поле локально и начали квантовать его в локальной окрестности вокруг сингулярности. В этом случае масса, которую мы рассматриваем, фактически равна нулю. В нашем определении метрики собственный выбор массы представляет собой массу Комара [11], которая для вакуумного решения уравнения Эйнштейна всегда равна нулю, если мы интегрируем по конечному объему.

Данное замечание естественным образом приводит нас к интерпретации, согласно которой наше квантование является собственным для выбранной метрики.

Наше решение для квантового уравнения должно быть очевидной волновой функцией без массы для локальной системы отсчета.

5 Заключение и некоторые выводы

В данной статье мы пытаемся пролить новый свет на наше понимание гравитации. Мы утверждаем, что гравитация может рассматриваться подобно классическому полю, распространяющемуся в вакууме в виде волны. Это

замечание приводит нас к выводу, что мы можем попытаться квантовать это поле и ввести эффективную теорию квантовой гравитации.

Мы можем также заключить, что естественно рассматривать гравитацию в (3+1)-мерном представлении. Это дает нам возможность заново ввести время в квантовую механику как регулярное измерение. Таким путем мы можем получить естественную интерпретацию для полученного нами квантовомеханического уравнения.

Показано также, что расслоение пространства-времени не уникально при классическом подходе к гравитации как к полю. Мы можем иметь одну и ту же интерпретацию для классического поля при выборе двух различных расслоений. Эта проблема исчезает, если мы приступаем к квантованию нашего поля. В зависимости от выбора (3+1)-метрики мы получаем разные квантовомеханические уравнения. Мы можем интерпретировать это как выбор координатной системы.

При классическом квантовании мы выбираем систему координат для наблюдателя в бесконечности, а для ковариантного квантования мы выбираем локального наблюдателя. Мы делаем вывод, что следует строго выбирать нашу метрику, зависящую от рассматриваемой проблемы.

В подразделе 4.1.2 рассмотрен случай, когда энергия нашей системы переносится фотоном. Из уравнения (95) мы видим, что энергия этого фотона не изменится пропорционально его частоте при высоких энергиях, близких к планковским масштабам. Это может быть использовано для проверки нашей модели.

При ковариантном квантовании мы замечаем, что в локальной системе отсчета мы наблюдаем только безмассовые частицы, движущиеся со скоростью света. Эта картина изменится, если мы введем взаимодействие с другими частицами, например, с нашим фотоном. Вопрос требует дальнейшего исследования, однако мы можем предложить тест для нашей модели с использованием высокочастотного резонатора, где мы можем проверить взаимодействия между фотонами, чья волновые функции имеют планковские масштабы и взаимодействуют между собой.

6 Благодарности

Мы хотели бы поблагодарить проф. Claudio M. G. de Sousa за все его существенные замечания.

Ссылки

- [1] Milutin Blagojevic, Gravitation and gauge symmetries, Institute of Physics Publishing, (2002) London
- [2] S.Weinberg, Killing Vectors.13.1 in Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. New York:Wiley, pp. 375-381, (1972)
- [3] R. Geroch, A. Held, and R. Penrose, A spacetime calculus based on pairs of null directions, J.Math. Phys. 14, 874 (1973)
- [4] R. Arnowitt, S. Deser, C.W.Misner, "The Dynamics of General Relativity", arXiv:gr-qc/0405109
- [5] Robert M.Wald, "General Relativity", ISBN-13:978-0-226-87033-5
- [6] P. Ogonowski, Time Dilation as Field, Journal of Modern Physics, Vol. 3 No. 2, 2012, pp. 200-207
- [7] James B. Hartle, "Quantum Cosmology: Problems for the 21st Century", arXiv:gr-qc/9701022

- [8] Claus Kiefer, "On the interpretation of quantum theory - from Copenhagen to the present day", arXiv:quant-ph/0210152
- [9] A S Eddington, The Mathematical Theory of Relativity, 2nd edition (Cambridge University press), at sec. 43, p.93. (1924)
- [10] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, and S.P. Novikov, "Modern Geometry-Methods and Applications, Part I", Springer-Verlag, Berlin ISBN 0-387-90872-2 (1984)
- [11] Misner, Thorne, Wheeler, "Gravitation", WH Freeman and Company. ISBN 0-7167-0344-0 (1973)
- [12] Keiichi Maeda, Misao Sasaki, Takashi Nakamura and Shoken Miyama, "A New Formalism of the Einstein Equations for Relativistic Rotating Systems", Prog. Theor. Phys. Vol. 63 No. 2 (1980) pp. 719-721
- [13] M. Novello, E. Bittencourt, U.Moschella, E. Goulart, J.M. Salim, J. Toniato, "Geometric scalar theory of gravity", arXiv:1212.0770
- [14] Claudio M. G. de Sousa, "On the frequency shift of gravitational waves", arXiv:gr-qc/0207052