

Принцип Ландауэра в квантовой области

Дж. Андерс, С. Шаббир, С. Хилт, Э. Лутц (Великобритания, Германия)

Сокращенный перевод М.Х. Шульмана (shulman@dol.ru)

Arxiv: 1006.1420v1

Landauer's principle in the quantum domain

Janet Anders, Saroosh Shabbir,

Dept of Physics & Astronomy, University College London, London WC1E 6BT, UK
j.anders@ucl.ac.uk

Stefanie Hilt, Eric Lutz,

Department of Physics, University of Augsburg, 86135 Augsburg, Germany

В недавних статьях, обсуждающих термодинамические процессы в сильно связанных квантовых системах, заявлено о нарушении принципа Ландауэра, что влечет нарушение второго начала термодинамики [1, 2, 3, 4]. Если это так, то отсюда вытекают сильные следствия. Могли бы быть построены вечные двигатели при приближении их рабочей температуры к нулю. Это могло бы иметь также серьезные последствия для доказательства теоретико-информационных результатов, таких, как граница Холево [5]. Здесь мы показываем, почему эти утверждения ошибочны. Корреляции, имеющие место в сильно связанных квантовых системах, требуют переосмысления того, как вычисляются энтропия, тепло и работа. Показано, что тщательный и полный анализ позволяет решить парадокс [6].

Принцип Ландауэра

Компьютеры – это тепловые машины, которые потребляют энергию E и совершают “работу” W , решая задачу. Однако реальные компьютеры также рассеивают (т.е. выделяют) тепло Q . Эта теряемая энергия в точности равна разности между потребляемой энергией и совершаемой работой: $E - W = Q$. Это фундаментальное уравнение баланса известно как первое начало термодинамики. В теории информации в 60-х годах специалисты заинтересовались, может ли эффективность компьютера улучшена за счет снижения выделяемого тепла до произвольно низкого уровня, т.е. может ли компьютер работать вообще без выделения тепла? Ответ *отрицательный*! Хотя многие вычислительные операции могут (обратимо) осуществляться без выделения тепла, имеется фундаментальный предел, возникающий при *стирании одного бита информации*. Принцип Ландауэра [7, 8] устанавливает нижнюю границу этого тепла, равную $k_B T \ln 2$, если стирание происходит при температуре T , причем k_B – постоянная Больцмана. Принцип стирания был первоначально сформулирован для классических битов. Lubkin [9] обобщил это на стирание общих квантовых состояний ρ^1 , когда генерируется тепло, не меньшее, чем

$$Q_{\text{erasure}} \geq k_B T S(\rho), \quad (1)$$

¹ ρ - эрмитовы положительные операторы с $\text{tr}[\rho] = 1$.

где $S(\rho) = -\text{tr}[\rho \ln \rho]$ – оператор фон Неймана для энтропии ρ .

Принцип Ландауэра играет важную роль в решении парадокса, связанного с мысленным экспериментом 19-го века, где речь идет о ящике, заполненном газом, и демоне [10, 11]. Этот демон, известный как демон Максвелла, может следить за движением частиц газа и отделять более быстрые частицы от более медленных, создавая, таким образом, две области с различными температурами. Но тогда он мог бы извлекать из газа полезную работу, поместив поршень на пути быстрых частиц газа. Быстрые частицы будут толкать поршень (= работа), который, в свою очередь, замедляет их (= уменьшает количество тепла), без изменения полной энергии, т.е. $W = -Q$. Такой процесс входит в противоречие со вторым началом термодинамики, который утверждает, что не существует циклических процессов, в которых тепло полностью переходило бы в работу. Этот парадокс может быть решен благодаря тому, что для замкнутости термодинамического цикла необходимо, чтобы любая *информация* о частицах газа, хранимая демоном, должна стираться! В силу принципа Ландауэра при этом *генерируется* тепло, и тщательный анализ показывает, что как раз такое количество тепла нужно для преодоления парадокса демона [7, 10, 12].

Принцип Ландауэра может быть использован для доказательства важных теорем квантовой теории информации, например, для нахождения границы Холево доступной информации и теоремы о невозможности клонирования² [5, 13, 14].

Второе начало термодинамики, неравенство Клаузиуса и принцип Ландауэра

Представим себе судно, которое всю мощность своих двигателей черпает исключительно за счет преобразования тепла, содержащегося в морской воде, обеспечивая этим собственное движение. В результате море должно становиться несколько холоднее, но это должно практически снова компенсироваться за счет трения между движущимся корпусом судна и водой. Замечательный способ путешествия! Такая чудесная машина могла бы решить все наши энергетические проблемы просто в силу способности преобразования тепла в “полезную энергию”. К сожалению, эта машина, известная как *вечный двигатель второго рода* (*perpetuum mobile of the second kind*), запрещена фундаментальным законом физики – вторым началом термодинамики.

Законы термодинамики описывают перенос тепла и работу в ходе термодинамических процессов. Первое начало утверждает, что энергия никогда не создается и не уничтожается, она лишь может изменять свою форму. Следовательно, в изолированной системе полная энергия сохраняется. В то время, как первое начало термодинамики описывает просто сохранение энергии в термодинамической системе, второе начало делает предсказание относительно того, как различные виды энергии могут трансформироваться в любые другие. Имеется много формулировок второго начала термодинамики, но все они эквивалентны в том смысле, что каждая из них логически следует из другой. Выше мы уже привели одну такую формулировку. Она называется формулировкой лорда Кельвина для тепловой машины: невозможно полностью преобразовать тепло в работу в ходе циклического процесса. Клаузиус ввел понятие энтропии, с помощью которого стало возможным математическое описание второго начала – так называемое неравенство Клаузиуса. Оно утверждает, что для системы, находящейся первоначально в состоянии теплового равновесия, тепло Q ,

²При переводе соответствующий раздел опущен. – Примеч. пер.

полученное системой при температуре T , не может превысить изменения энтропии системы ΔS , умноженной на температуру,

$$Q \leq k_B T \Delta S, \quad (8)$$

где знак равенства справедлив в случае квазистатических, обратимых процессов.

Из неравенства Клаузиуса легко вывести принцип Ландауэра [6]. Рассмотрим изолированную систему с двумя устойчивыми состояниями, которые используются для кодирования одного бита информации (например симметричная двойная потенциальная яма с высокоэнергетической перегородкой). Эта система вначале находится в равновесии при температуре T , и оба ее состояния заняты с равной вероятностью. Мы сбрасываем память, вначале присоединяя ее к резервуару, а затем модулируя потенциал с целью перевести систему в одно из двух ее состояний с вероятностью единица [7]. Энтропия фон Неймана системы, следовательно, будет равна $\ln 2$ до присоединения к резервуару и нулю после полного стирания информации. Из неравенства Клаузиуса мы тогда получаем, что рассеянное тепло составляет

$$Q_{\text{dissipated}} = -Q \geq -k_B T \Delta S = k_B T \ln 2. \quad (9)$$

Это и есть принцип стирания информации Ландауэра.

Нарушение неравенства Клаузиуса

Недавно оживился интерес к принципу Ландауэра применительно к квантовым системам. Появился ряд публикаций [1, 2, 4, 3], использующих модель квантового броуновского осциллятора, взаимодействующего с резервуаром, утверждающих, что второе начало термодинамики может быть нарушено. Для некоторого термодинамического процесса, в котором масса осциллятора растет, было показано, что неравенство Клаузиуса не выполняется, т.е. $Q \not\leq k_B T \Delta S$, откуда следует, что принцип Ландауэра может не выполняться.

Дадим краткую сводку аргументов, приводящих к такому нарушению. Отправная точка исследования гамильтонана осциллятора с массой M и частотой колебаний ω

$$H_o = \frac{p^2}{2M} + \frac{M\omega^2 q^2}{2}. \quad (10)$$

где p и q – операторы импульса и координаты осциллятора, и они подчиняются коммутационным соотношениям $[q, p] = i\hbar$. Когда осциллятор связан с резервуаром, гамильтониан приобретает вид

$$H = H_o + H_b + H_{ob} \quad (11)$$

где H_b – гамильтониан резервуара, $H_{ob}(\eta)$ описывает эту связь, параметризованную с помощью η , между осциллятором и резервуаром³. Состояние равновесия осциллятора и резервуара при температуре T дается выражением

³Подробное описание гамильтониан и дальнейшее вычисление может быть найдено в стандартных учебниках [15], а также в статьях, обсуждающих нарушение [1] и решение парадокса [6].

$$\rho_{ob} = \frac{e^{-\frac{H}{k_B T}}}{\text{tr}[e^{-\frac{H}{k_B T}}]}, \quad (12)$$

т.е. квантовомеханическим аналогом распределения Больцмана. Ожидаемые значения операторов осциллятора O_α оцениваются выражением $\langle O_\alpha \rangle = \text{tr}[O_\alpha \rho_{ob}] = \text{tr}_o[O_\alpha \rho_o]$, где $\rho_o = \text{tr}_b[\rho_{ob}]$ – редуцированное состояние осциллятора. Характеристиками осциллятора являются средние значения его координаты и импульса

$$\langle q \rangle = 0 \quad \text{и} \quad \langle p \rangle = 0, \quad (13)$$

и их отклонения

$$\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2 =: f_1(T, \omega, M, \eta) \quad \text{и} \quad \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 =: f_2(T, \omega, M, \eta), \quad (14)$$

которые являются известными функциями температуры, частоты, массы осциллятора и силы связи между осциллятором и резервуаром (см. детали в [6]).

Энтропия осциллятора может быть легко выражена как функция этих параметров

$$S(T, \omega, M, \eta) = \left(v + \frac{1}{2}\right) \ln \left(v + \frac{1}{2}\right) - \left(v - \frac{1}{2}\right) \ln \left(v - \frac{1}{2}\right), \quad (15)$$

где $v = v(T, \omega, M, \eta) = \sqrt{f_1(T, \omega, M, \eta) f_2(T, \omega, M, \eta)} / \hbar$. Изменение некоторого термодинамического параметра от α_0 до α_1 приводит к изменению энтропии

$$\Delta S^{(\alpha)} = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \frac{dS}{d\alpha}. \quad (16)$$

Тепло, обусловленное изменением функций f_1 и f_2 от параметра α , дается выражением

$$\Delta S^{(M)} < 0 \quad \text{and} \quad Q^{(M)} > 0, \quad (18)$$

Откуда следует

$$Q^{(M)} \not\leq k_B T \Delta S^{(M)}, \quad (19)$$

что с очевидностью противоречит неравенству Клаузиуса [1, 2].

Решение парадокса

Этот результат, определяемый связью между неравенством Клаузиуса, вторым началом термодинамики и принципом Ландауэра, очень неудобен! Это может оказаться весьма драматичным, похожим на фантастику, как для термодинамики, так и для квантовой теории информации, поскольку открывает возможность существования тепловых машин, которые работают точно за счет преобразования тепла в работу и информацию, нарушая границу Холево, теоремы о невозможности клонирования и сверхсветовой сигнализации. Только требование использовать эту невероятную энергию могло бы перевести

квантовую систему в режим сильной связи и охладить ее до низких температур. Тогда возможны любые парадоксальные процессы! Итак, что-то должно оказаться ошибочным [16]! Как же мы можем разрешить данное противоречие?

Перепроверяя математические выкладки, приводящие к уравнению (18), нетрудно убедиться в их правильности. Однако обоснование, приводящее к объявленному нарушению неравенства Клаузиуса, является неверным. Неверным в аргументации является то, что связь между осциллятором и равновесным резервуаром *нельзя пренебречь*, как это обычно предполагается. Действительно, неравенство Клаузиуса предполагает, что начальное состояние рассматриваемого процесса с изменяющимися параметрами является термальным состоянием. Когда связь между осциллятором и резервуаром можно пренебречь, т.е. $\eta \rightarrow 0$, редуцированное состояние осциллятора ρ_o действительно является термальным, т.е. может быть аппроксимировано соотношением

$$\rho_o(T) \approx \frac{e^{-\frac{H_o}{k_B T}}}{\text{tr}[e^{-\frac{H_o}{k_B T}}]}. \quad (20)$$

Эти термальные состояния характеризуются функциями состояния f_1 and f_2 , которые (приблизительно) удовлетворяют соотношениям

$$f_1 f_2 \approx \left(\frac{\hbar}{2} \coth \frac{\hbar \omega}{2 k_B T} \right)^2 \quad \text{и} \quad \frac{f_2}{f_1} \approx (M \omega)^2. \quad (21)$$

Однако, когда связь является сильной, редуцированное состояние ρ_o отклоняется от термальной формы Гиббса 20. Это состояние является “сжатым (squeezed)” в том смысле, что отклонение координаты может быть гораздо меньше, чем обычно, при широком распределении импульса.

Непротиворечивый анализ этой ситуации должен учитывать связь между осциллятором и резервуаром [6]. Процесс увеличения массы осциллятора, рассмотренный выше, является, очевидно, двухшаговым процессом. Чтобы вычислить изменение энтропии и тепла, мы сначала рассмотрим одиночный осциллятор в термальном состоянии $\rho_o(T)$ при температуре T . Тогда он связан с резервуаром, характеризующимся параметром связи η , где теперь система в целом – осциллятор и резервуар – снова является термальным состоянием Гиббса ρ_{ob} при температуре T , в то время как редуцированное состояние осциллятора является не-термальным, сжатым состоянием. Только тогда его масса увеличивается на конечном этапе. Изменение энтропии и тепло для этого термодинамически полного процесса равны тогда

$$\Delta S = \Delta S^{(\eta)} + \Delta S^{(M)} \geq 0 \quad \text{и} \quad Q = Q^{(\eta)} + Q^{(M)} \leq 0. \quad (22)$$

Может быть показано далее, что во всем диапазоне параметра справедливо соотношение

$$Q \leq k_B T \Delta S, \quad (23)$$

которое решает парадокс и восстанавливает справедливость неравенства Клаузиуса и, следовательно, принципа Ландауэра в квантовой области [6].

Обсуждение

Урок, который мы должны извлечь из этой парадоксальной ситуации, состоит в том, что при сильных корреляциях (как классических, так и квантовых), аргументы и доказательства, которые базируются на термодинамических расчетах, должны быть тщательно переосмыслены. Стандартная термодинамика предполагает, что корреляции между системой, подлежащей описанию, и стабилизирующим резервуаром, соотнесенные с площадью поверхности системы и ее вкладом, малы в сравнении с ролью объема системы. Но это неверно для многих систем! Малые системы, такие, как отдельный осциллятор, явно не подчиняются этой логике. Более того, квантовые корреляции в реалистических моделях в действительности обнаруживают запутывание, которое соответствует площади поверхности (известно как *законы площади*). Однако чрезвычайная сила этих частных корреляций может также приводить к тому, что их общий вклад соизмерим с вкладом объема системы. Во всех этих случаях корреляции должны быть явно учтены, как и их термодинамическое значение! Пренебрежение этим неизменно приводит к ошибочным выводам и парадоксам.

Благодарности:

JA благодарит Королевское Общество (Лондон) за поддержку от Dorothy Hodgkin Fellowship. Эта работа была, далее, поддержана Программой Эми Нётер DFG (контракт LU1382/1-1) и группой (cluster of excellence) Nanosystems Initiative Munich (NIM).

Ссылки

- [1] A.E. Allahverdyan and T.M. Nieuwenhuizen (2000): *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1799.
- [2] A.E. Allahverdyan and T.M. Nieuwenhuizen (2001): *Phys. Rev. E* **64**, 056117.
- [3] H.S. Leff and A.F. Rex (2003): *Maxwell's Demon 2*, (IOP Publishing, Bristol).
- [4] C.H. Høorhammer and H. Bøuttner (2005): *J. Phys. A* **38**, 7325.
- [5] M. B. Plenio (1999): *Phys. Lett. A* **263**, 281.
- [6] S. Hilt, J. Anders, E. Lutz, S. Shabbir (2010): arXiv:1004.1599, available at <http://arxiv.org/>.
- [7] R. Landauer (1961): *IBM J. Res. Dev.* **5**, 183, reprinted in [10].
- [8] R. Landauer (1988): *Nature* **355**, 779.
- [9] E. Lubkin (1987): *Int. J. Theo. Phys.* **26**, 523.
- [10] H.S. Leff and A.F. Rex (1990): *Maxwell's Demon: Entropy, Information, Computing* (Adam Hilger, London).
- [11] http://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell_demon
- [12] C.H. Bennett (1982): *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 905, reprinted in [10].
- [13] M. B. Plenio and V. Vitelli (2001): *Contemp. Phys.* **42**, 25.
- [14] K. Maruyama, F. Nori, V. Vedral (2009): *Rev. Mod. Phys.* **81**, 23.
- [15] U. Weiss (1999): *Quantum Dissipative Systems* (World Scientific, Singapore).
- [16] G.W. Ford and R.F. O'Connell (2006): *Phys. Rev. Lett.* **96**, 020402