ТЕОРЕМА КОХЕНА-СПЕКЕРА

(Обзор по материалам [8], [14], [15] и [16] подготовил
М.Х. Шульман, shulman@dol.ru)

В квантовой механике теорема Кохена-Спекера относится к числу “запрещающих” теорем ("no go" theorem). Она была доказана [1] в 1967 году, установив определенные ограничения на допустимые типы *скрытых параметров*, с помощью которых явное присутствие случайности в квантовой механике пытаются объяснить за счет детерминистической теории, обладающей скрытыми состояниями. Эта теорема дополняет теорему Белла.

Теорема Кохена-Спекера (КС) доказывает наличие противоречия между двумя основными допущениями теорий со скрытыми параметрами, претендующими на воспроизведение результатов квантовой механики:

- что все скрытые параметры, соответствующие квантомеханическим наблюдаемым величинам, *имеют в заданный момент времени определенные значения*,
- и что значения этих переменных является внутренними и *независимыми* от устройства, которое используется для их измерения.

Противоречие порождается тем фактом, что квантовомеханические наблюдаемые должны быть *некоммутативными*, что делает их несовместимыми с *коммутативной* алгеброй, предполагаемой для скрытых переменных, представленных классическими структурами.

Доказательство теоремы КС демонстрирует несправедливость допущения Эйнштейна в знаменитой статье ЭПР [2] о том, что квантовомеханические наблюдаемые представляют `элементы физической реальности'. Более общо, теорема исключает существование теорий со скрытыми параметрами, требующими от элементов физической реальности быть *не*контекстуальными (т.е. независимыми от измерительных средств).

История

КС-теорема представляет собой важный шаг в дискуссии о (не)полноте Копенгагенской интерпретации квантовой механики, начатой в критической статье 1935 г. анализом ЭПР-парадокса. Этот парадокс выводится из предположения, что результат некоторого квантовомеханического измерения детерминистически обусловлен таким свойством микроскопического объекта, как его существование в качестве *элемента физической реальности* еще до выполнения измерения. В статье ЭПР предполагалось, что измеренное значение квантовомеханической наблюдаемой может играть роль такого элемента физической реальности. Как следствие этого метафизического предположения, критика в работе ЭПР не была воспринята слишком серьезно большинством членов физического сообщества. Более того, в своем ответе на статью ЭПР Бор [3] указал на содержащуюся в ней неоднозначность, на то, что там предполагалась неконтекстуальность значения квантовомеханической наблюдаемой (т.е. ее независимость от конкретики измерения). Учет же контекстуальности, по мнению Бора, делает возражения ЭПР несостоятельными. После этого Эйнштейном в работе [4] было замечено, что ссылка Бора на контекстуальность приводит к нелокальности – призрачному действию на расстоянии (spooky action at a distance) – и, вследствие этого, последнюю необходимо принять, чтобы избежать неполноты.

В 1950-х и 1960-х были открыты две приемлемые с точки зрения метафизики линии развития, обе основанные на “запрещающей” теореме ("no go" theorem) фон Неймана [5], призванной доказать невозможность теорий со скрытыми параметрами, которые давали бы тот же результат, что и квантовая механика. Во-первых, Бом развил свою интерпретацию квантовой механики, в целом воспринятую всеми как теорию со скрытыми параметрами, обосновывающую квантовую механику. Нелокальность теории Бома побудила Белла предположить, что квантовая реальность *не* локальна и что вероятно только *локальные* теории со скрытыми переменными не согласуются с квантовой механикой. Что более важно, Белл сумел перевести задачу с метафизического уровня на физический, выведя знаменитое неравенство Белла, выполнение которое можно проверить экспериментально.

Вторая линия – это теорема Кохена-Спекера. Существенное отличие от подхода Белла состоит в анализе обоснования квантовой механики с помощью теорий со скрытыми параметрами без апелляции к нелокальности. Хотя и здесь контекстуальность играет важную роль, но апелляция к нелокальности отсутствует, поскольку доказательство связано с наблюдаемыми, относящимися к единственному объекту и измеренными в одной и той же области пространства. Здесь контекстуальность связана с *не*совместимостью наблюдаемых в квантовой механике, несовместимость связана с взаимоисключающими измерительными настройками.

Еще Белл обратил внимание на то, что не всегда квантовые наблюдаемые являются совместимыми, т.е. принимают независимые значения при измерениях (например, если речь идет о компонентах спина частицы). Этим они, вообще говоря, отличаются от скрытых переменных (при доказательстве теоремы КС данный факт был учтен). Белл попытался дать анализ этой ситуации, при этом он основывал его на аргументах, связанных с использованием множества бинарных векторов, вероятность для каждого из которых имела *непрерывное* распределение, в сумме давая единицу. Ему удалось доказать, что два вектора состояния, имеющие значения 1 и 0, *не могут быть сколь угодно близкими* в гильбертовом пространстве, но должны иметь минимальное угловое различие, в то время как модель со скрытыми параметрами требует, чтобы они могли быть сколь угодно близкими.

Теорема КС улучшает эту аргументацию Белла. В то время, как последняя исходит из допущения о континуальном распределении векторов гильбертового пространства, Кохен и Спекер смогли в явном виде представить дискретный, даже конечный набор наблюдаемых в этом пространстве, для которого некоторое присвоение значений с помощью скрытых параметров приводит к несовместимости. В итоге аргументация КС оперирует только с конечным набором дискретных наблюдаемых и рассматривает одно-частичную реализацию физической системы, тем самым она тривиальным образом избегает допущений о сепарабельности и нелокальности.

Формулировка теоремы

Теорема КС выясняет, возможно ли отобразить набор квантовомеханических наблюдаемых в набор *классических* величин даже при условии, что все классические величины взаимно совместимы. Первое замечание, сделанное в статье Кохена-Спекера, состоит в том, чтобы сделать это тривиальным способом, игнорируя алгебраическую структуру набора квантовомеханических наблюдаемых. Действительно, пусть $p_{\mathbf{A}}(a_k)$ есть вероятность того, что наблюдаемая **A** имеет значение a_k, тогда произведение $\Pi_{\mathbf{A}} p_{\mathbf{A}}(a_k)$, вычисленное для всех возможных наблюдаемых **A**, дает вероятность совместного распределения, определяющую все вероятности квантовомеханических наблюдаемых с помощью маргиналов. Кохен и Спекер замечают, однако, что это совместное распределение вероятности неприемлемо, поскольку оно игнорирует все корреляции между наблюдаемыми. Так, в квантовой механике, из того, что $\mathbf{A}^2$ имеет значение a_k^2, если $\mathbf{A}$ имеет значение a_k, следует, что значения величин $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^2$ сильно коррелированы.

Говоря более общо, Кохен и Спекер требуют, чтобы для произвольной функции *f* значение наблюдаемой удовлетворяло условию

$$v(f(\mathbf{A})) = f(v(\mathbf{A}))$$

Если $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ *совместимые* (одновременно измеримые) переменные, то мы должны ожидать выполнения двух следующих равенств:

$$v(c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2) = c_1 v(\mathbf{A}_1) + c_2 v(\mathbf{A}_2),$$

где c_1 и c_2 действительные числа, и

$$v(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2) = v(\mathbf{A}_1)v(\mathbf{A}_2)$$

Первое из этих двух равенств значительно *слабее*, чем допущение фон Неймана (последний не уточнял, должно ли это равенство выполняться *независимо* от совместимости или несовместимости $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$). Кохен и Спекер смогли доказать, что существование априорных значений невозможно даже на основе этих более слабых допущений. С этой целью они ограничились наблюдаемыми специального класса, так называемыми бинарными (“да-нет”) наблюдаемыми, принимающими только значения 0 и 1 и отвечающими операторам *проектирования* на собственные векторы некоторых ортогональных базисе в гильбертовом пространстве. Ограничившись также только трехмерным гильбертовым пространством, они смогли отыскать набор из 117 таких проекционных операторов, *не* позволяющий сопоставить им однозначным образом ни 0, ни 1.

В оригинальном доказательстве [1] КС размерность гильбертова пространства *x*=3, а количество элементов (для которых нельзя однозначно назначить значения 0 или 1) *y*=117. Это оригинальное доказательство КС очень сложное. Позже были даны доказательства с меньшим числом наблюдаемых (среди многих других – [7] для *x*=3, *y*=33; [12] для *x*=4, *y*=20; [8] для *x*=4, *y*=18).

Доказательство [7] устанавливает результат KS в полной мере, очень просто и, более того, интуитивно понятным образом, поскольку оно оперирует с тремя измерениями; мы отсылаем читателя к работе [7]. Доказательства [12] и [8] получены для четырех измерений. Это, разумеется, более слабые результаты, чем в теореме КС (поскольку каждое противоречие в трехмерном случае является также противоречием в случае большего числа измерений, но обратное неверно). Однако, эти доказательства очень просты и наглядны. Более того, может быть показано ([13]), что *y*=18 – это наименьшее количество, для которого выполняется теорема КС.

Вместо оригинального доказательства Кохена и Спекера здесь будут приведены два гораздо более простых доказательств, найденных значительно позднее, которое позволяет использовать намного меньшее число проекционных операторов, рассматриваемых в четырехмерном гильбертовом пространстве. При этом оказывается (см. доказательство Кабелло], что сходный результат можно получить для набора всего лишь из 18 проекционных операторов.

Доказательство Кабелло [8]

Пусть в некоторой физической системе $v(\mathbf{u})$ обозначает результат 1 или 0, полученный при измерении (измерению ставится в соответствие проекционный оператор $P_{\mathbf{u}}$, т.е. проектор $|\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}|$) в некоторой неконтекстуальной теории со скрытыми переменными (NCHV). Чтобы упростить обозначения, будем писать $\mathbf{u}_i$ как вектор-строку, опуская нормировочную константу и отождествляя проекторы с даваемыми ими результатами. Исходные условия теоремы КС могут быть сформулированы следующим образом:

(a) *В отдельно взятой системе каждый проектор (измерение наблюдаемой) $P_{\mathbf{u}_i}$ дает единственный результат – 0 или 1, который не зависит от результата измерения любой другой наблюдаемой (неконтекстуальность).*

(b) *Для каждого набора одномерных проекторов, сумма которых является единичной матрицей в n-мерном гильбертовом пространстве состояний системы, один и только один проектор дает 1, тогда как остальные n − 1 проекторов этого набора дают 0.*

Следуя этим правилам, если результат для некоторого данного проектора по данному вектору равен 1, то результаты для проекторов по всем ортогональным (к нему?) векторам должны быть равны нулю.

Рассмотрим результаты для проекторов по следующим 9 наборам ортогональных четырехмерных векторов:

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
u_1	(0,0,0,1)	(0,0,0,1)	(1,-1,1,-1)	(1,-1,1,-1)	(0,0,1,0)	(1,-1,-1,1)	(1,1,-1,1)	(1,1,-1,1)	(1,1,1,-1)
u_2	(0,0,1,0)	(0,1,0,0)	(1,-1,-1,1)	(1,1,1,1)	(0,1,0,0)	(1,1,1,1)	(1,1,1,-1)	(-1,1,1,1)	(-1,1,1,1)
u_3	(1,1,0,0)	(1,0,1,0)	(1,1,0,0)	(1,0,-1,0)	(1,0,0,1)	(1,0,0,-1)	(1,-1,0,0)	(1,0,1,0)	(1,0,0,1)
u_4	(1,-1,0,0)	(1,0,-1,0)	(0,0,1,1)	(0,1,0,-1)	(1,0,0,-1)	(0,1,-1,0)	(0,0,1,1)	(0,1,0,-1)	(0,1,-1,0)
Σ	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Сумма $\Sigma\mathbf{u}_i$ (ячейка в нижней строке) четырех ортогональных векторов каждого набора в силу условия (b) равна 1. Всего в наборы (1–9) входят 18 различных векторов. Обозначим через S этот набор векторов, а через P – набор соответствующих измерений (propositions). Независимая от состояния версия теоремы BKS может быть сформулирована следующим образом:

Не существует набора P результатов измерений, удовлетворяющего условиям (a) и (b).

Доказательство очевидно: сумма всех столбцов (1–9) *нечетна*, тогда как сумма всех четырех строк должна быть *четной*, поскольку каждый результат измерения входит в эту совокупность четырех строк ровно два раза (*двукратное* вхождение одного и того же вектора в разные столбцы маркировано одинаковым цветом).

Векторы в S могут быть интерпретированы как чистые спиновые состояния частиц со спином ½ , имеющих два возможных состояния. 12 векторов в наборах (1–4) факторизуемы (т.е. имеют вид $(a,b)^{(1)} \otimes (c,d)^{(2)}$), и соответствующие проекторы являются произведениями локальных наблюдаемых. Например, в обычном представлении Паули (ненормированный) вектор (1,−1, 0, 0) представляет состояниеte $|\sigma_z = +1\rangle^{(1)} \otimes |\sigma_x = -1\rangle^{(2)}$, а соответствующий ему проектор представляет утверждение: имеет ли наблюдаемая $\widehat{\sigma}_z^{(1)}$ хорошо определенное (скрытое) значение +1 *и* наблюдаемая $\widehat{\sigma}_x^{(2)}$ - хорошо определенное (скрытое) значение −1, причем $v(1,-1,0,0) = 1$ если ответ равен “да”, и $v(1,-1,0,0) = 0$ в противном случае.

Оставшиеся шесть векторов (наборы 5–9) являются запутанными, так что отвечающие им измерения не могут быть факторизованы в терминах локальных наблюдаемых. Каждый из них может быть выражен в терминах пары наблюдаемых $\widehat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \widehat{\sigma}_z^{(2)}$, $\widehat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \widehat{\sigma}_x^{(2)}, \widehat{\sigma}_x^{(1)} \otimes \widehat{\sigma}_z^{(2)}$ и $\widehat{\sigma}_x^{(1)} \otimes \widehat{\sigma}_x^{(2)}$ [7], [8]. Например, (1,−1, 1, 1) есть собственный вектор состояний $\widehat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \widehat{\sigma}_x^{(2)}$ и $\widehat{\sigma}_x^{(1)} \otimes \widehat{\sigma}_z^{(2)}$ с собственными значениями −1 и +1 соответственно и, следовательно, может быть ассоциирован с утверждением: имеют ли наблюдаемые $\widehat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \widehat{\sigma}_x^{(2)}$ *и* $\widehat{\sigma}_x^{(1)} \otimes \widehat{\sigma}_z^{(2)}$ хорошо определенные (скрытые) значения −1 и +1 соответственно?

Доказательство Переса [16]

Квантовая механика предсказывает: *измерения квадрата (компонент) спина частицы со спином 1 в трех ортогональных направлениях всегда дает ответы 1, 0, 1 в некотором порядке* (поскольку для частицы со спином 1 квадраты операторов спина s_x^2, s_y^2, s_z^2 коммутируют и в сумме дают 2).

Это “101 – свойство” является парадоксальным, потому что из него уже следует, что величина, которую еще только предстоит измерить, не может на самом деле существовать до ее “измерения”. В противном случае должна существовать функция, определенная на сфере возможных направлений, принимающая три значения {1, 0, 1} для каждой ортогональной тройки направлений в некотором порядке. Из этого следует, что она принимает одинаковое (поскольку речь идет о *квадратах* компонент спина – М.Х.Ш.) значение для пары противоположных направлений и никогда не дает значение 0 сразу для двух взаимно ортогональных направлений.

Будем называть функцию, определенную на множестве направлений, которая имеет все три эти свойства, “101 – функцией ” для этого множества. Но, к несчастью, мы имеем:

Парадокс Кохена-Спекера: *Не существует 101 – функции для 33 пар направлений рис. 1 (конфигурация Переса).*

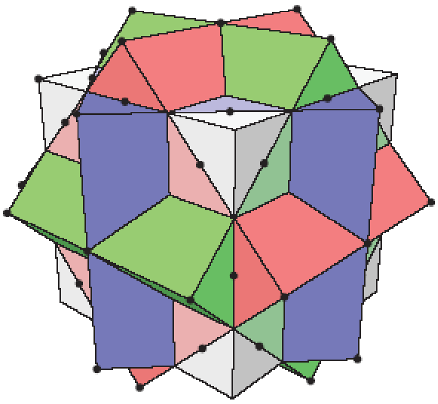

Figure 1a

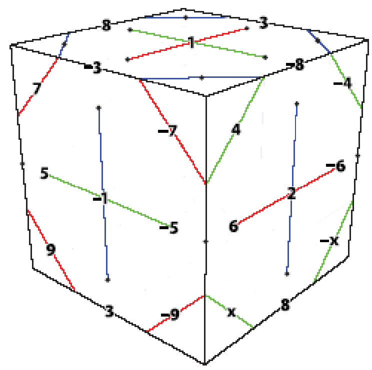

Figure 1b

Три раскрашенных куба на рис. 1a получены поворотами белого куба на 45° вокруг его координатных осей. 33 направления – это оси симметрии раскрашенных кубов, они проходят через кружки на рис 1a. Рис. 1b показывает, где эти направления пересекают белый куб.

Доказательство. Назовем узел четным или нечетным согласно тому, принимает ли на нем[1] предполагаемая 101-функция значение 0 или 1, и сопоставим нарастающие четные или нечетные числа узлам на рис. 1b, в результате чего мы установим противоречие.

Мы будем использовать некоторые слегка модифицированные ортогональные наборы – например, координатная тройка преобразуется поворотом в тройку (2, 3,−3), с чего начинается наше доказательство, которая, в свою очередь, преобразуется (поворотом относительно −1) в тройки (8,−7, 9) и (−8, 7,−9), что заканчивает доказательство.

Без потери общности можно принять, что узлы 1 и −1 являются нечетными, а узел 2 – четным, что, в свою очередь, заставляет узлы 3 и −3 быть нечетными. Теперь узлы 4 и -x образуют тройку с 3, так что один из них (4, без потери общности) является четным. При отражении, которое переставляет местами −4 и x при фиксированных 4 и -x, мы можем без потери общности считать, что −4 также четный узел.

Существует поворот на 90° вокруг 1, который перемещает 7, 5, 9 в 4, 6, x и показывающий, что 5 ортогонален 4, в то время как 1, 5, 6 является тройкой, а также что 6 ортогонален одновременно 7 и 9. Тогда 5 - нечетный, 6 - четный, и 7, 9 - нечетные. Подобная аргументация применима к узлам −5, −6, −7, −9.

В конечном счете, 8 образует тройку с −7 и 9, как и −8 с 7 и −9. Таким образом, оба эти узла должны быть четными, а поскольку они ортогональны, то этим противоречием доказательство теоремы завершается.

Замечания

1. *Контекстуальность*

В оригинальной статье Кохена-Спекера обсуждается возможность контекстно-зависимого распределения значений, т.е. того, что наблюдаемые, соответствующие одинаковым векторам в различных ячейках таблицы, не должны

[1] Т.е. (судя по предшествующей работе авторов), на направлении, проходящем через этот узел и центр куба – Примеч. пер.

иметь одинаковых значений, потому что различные колонки соответствуют *различным* измерительным конфигурациям. Поскольку субквантовая реальность (в соответствии с описанием с помощью теорий со скрытыми параметрами) может зависеть от измерительного контекста, возможно, что отношения между квантовомеханическими наблюдаемыми и скрытыми переменными представляют собой гомоморфизм, а не изморфизм. Это может сделать ненужным требование о контекстно-независимом распределении значений. Следовательно, теорема КС исключает лишь неконтекстуальные теории со скрытыми параметрами. Возможность контекстуальности возникает в так называемых модальных интерпретациях квантовой механики.

2. *Различные уровни описания*

Теорема КС доказывает неосуществимость предположения Эйнштейна о том, что значение квантовомеханической наблюдаемой представляет некоторый элемент физической реальности. Не является ли это весьма шокирующим результатом? Значение квантовомеханической наблюдаемой в первую очередь определяется финальным положением вектора состояния измерительного прибора, который фиксируется только в процессе измерения и который по этой причине не может играть роль элемента физической реальности. Элементы физической реальности, если они действительно существуют, для своего описания требуют не квантовую механику, а некоторую субквантовую (со скрытыми параметрами) теорию. В более поздних публикациях [9] в рамках теорий со скрытыми параметрами обсуждаются неравенства Белла, в этих теориях скрытый параметр предположительно связан с *субквантовым* свойством микроскопического объекта, отличным от значения квантовомеханической наблюдаемой. Это открывает возможность различения уровней реальности, описываемых различными теориями, которые ранее, между прочим, ввел еще Луи де Бройль. Для таких более общих теорий теорема КС применима только тогда, когда измерение мыслится как строгое в том смысле, что имеется *детерминистическое* отношение между субквантовым элементом физической реальности и в ходе измерения находится значение наблюдаемой. Существование или несуществование таких *субквантовых* элементов физической реальности теоремой КС не затрагивается.

Библиография

1. S. Kochen and E.P. Specker, "The problem of hidden variables in quantum mechanics", *Journal of Mathematics and Mechanics* **17**, 59-87 (1967).
2. A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?" *Phys. Rev.* **47**, 777-780 (1935).
3. N. Bohr, "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?" *Phys. Rev.* **48**, 696-702 (1935).
4. A. Einstein, "Quanten-Mechanik und Wirklichkeit", *Dialectica* **2**, 320 (1948).
5. J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der* Quantenmechanik*, Springer, Berlin, 1932; English translation:* Mathematical foundations of quantum mechanics*, Princeton Univ. Press, 1955, Chapter IV.1,2.*
6. N.D. Mermin, "What's wrong with these elements of reality?" *Physics Today*, **43**, Issue 6, 9-11 (1990); N.D. Mermin, "Simple unified form for the major no-hidden-variables theorems", *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3373 (1990).
7. A. Peres, "Two simple proofs of the Kochen-Specker theorem", *J.* Phys. A: Math. Gen. ***24****, L175-L178 (1991).*

8. A. Cabello, "A proof with 18 vectors of the Bell-Kochen-Specker theorem", in: M. Ferrero and A. van der Merwe (eds.), New Developments on Fundamental Problems in Quantum Physics, Kluwer Academic, Dordrecht, Holland, 1997, 59-62; Adan Cabello, Jose M. Estebaranz, Guillermo Garcia Alcaine, "Bell-Kochen-Specker theorem: A proof with 18 vectors", http://arxiv.org/abs/quant-ph/9706009v1
9. e.g. J.F. Clauser and M.A. Horne, "Experimental consequences of objective local theories", *Physical Review D* **10**, 526-535 (1974).
10. Bell, J. S. (1966): "On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics", *Reviews of Modern Physics* 38: 447-52; reprinted in his (1987) (page references are to the reprint).
11. Bell, J. S. (1987): *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics* (Cambridge; Cambridge University Press)
12. Kernaghan, M. (1994): "Bell-Kochen-Specker Theorem for 20 Vectors", *Journal of Physics* A 27: L829-30.
13. Pavičić, M., Merlet, J.-P., McKay, B., and McGill, N. D. (2005): "Kochen-Specker Vectors", *Journal of Physics* A, 38: 1577-92.
14. Carsten Held, *The Kochen-Specker Theorem*, Stanford Encyclopedia of Philosophy http://plato.stanford.edu/entries/kochen-specker/
15. Википедия (англ. Версия) http://en.wikipedia.org/wiki/Kochen-Specker_theorem
16. John Conway and Simon Kochen. "The Strong Free Will Theorem". arXiv:0807.3286v1 [quant-ph] 21 Jul 2008