Почему дьявол играет в кости?

А. Драган (Польша)

Перевод М.Х. Шульмана (shulman@dol.ru)

------

arXiv:0806.4875v1 [quant-ph] 30 Jun 2008

Why devil plays dice?

Andrzej Dragan
Institute of Theoretical Physics, University of Warsaw, Hoza 69, 00-681 Warsaw, Poland
e-mail: dragan@fuw.edu.pl

Принцип относительности, распространяемый на все, а не только на досветовые системы отсчета, ведет к нарушению законов причинности способом, известным из фундаментальных постулатов квантовой теории. Показано, как квантовая неопределенность, основанная на комплексных амплитудах вероятности и принципе суперпозиции, вытекает из специальной теории относительности.

I. ВВЕДЕНИЕ

Эксперименты по проверке теоремы Белла [1] показывают, что фундаментальные законы физики не могут быть сформулированы на основе локального и детерминистического способа описания. Согласно Эйнштейну, который не верил в фундаментальность квантовой теории, и его известной метафоре, некто действительно играет в кости. Но кто?

Целью данной статьи является показать, что, по иронии судьбы, основания для такого загадочного поведения Природы заложены в более фундаментальной теории – специальной теории относительности. Хорошо известно, что рассмотрение сверхсветовых частиц или инерциальных наблюдателей приводит к нарушениям причинного способа описания. В данной статье мы показываем, однако, что такое рассмотрение не ведет ни к возможности сверхсветовой передачи информации, ни к каким бы то ни было парадоксам причинности, но только к известным квантовым феноменам, таким, как неопределенность результата одиночного измерения и описанию движения с использованием комплексных амплитуд и линейной суперпозиции.

В разделе II мы показываем, что сверхсветовые коммуникации невозможны даже если существовали бы тахионы, взаимодействующие с материей. В разделе III мы выводим преобразования для всех инерциальных наблюдателей и вводим расширенную версию принципа относительности. Разделы IV и V описывают, как возникает квантовое описание движения с комплексными амплитудами, удовлетворяющими линейной суперпозиции, когда мы учитываем сверхсветовых наблюдателей. В разделе VI мы обсуждаем возможность существования тахионов, раздел VII завершает статью. Подробные математические выкладки вынесены в Приложения A и B.

II. ИСТОЧНИК НАРУШЕНИЯ ПРИЧИННОСТИ

Предположим, что некоторый локальный и контролируемый процесс связан с испусканием тахионов со скоростью $w > c$ покоящейся массивной частицей – мы обозначим это событие A на рис. 1a. Спустя некоторое время тахион попадает в детектор, расположенный в удаленной точке – событие B на рис. 1a. Другой инерциальный наблюдатель, движущийся с относительной досветовой скоростью $V > c^2/w$ обнаруживает, что порядок во времени этих событий противоположен – рис. 1b. Он видит тахион, испущенный детектором B и попадающий некоторое время спустя в источник A. Ответим на следующий вопрос – существует ли с точки зрения наблюдателя во второй инерциальной системе какой-либо процесс, приводящий к акту испускания тахиона детектором B? Очевидно, что такого объяснения не существует для прошлой мировой линии детектора B, так как мы предположили, что процесс испускания тахиона был локальным событием в A. Это показывает, что во второй инерциальной системе акт испускания тахиона из детектора B является абсолютно *спонтанным и не связанным с какой-либо причиной.* Поскольку выделенных систем не существует, мы заключаем, что испускание A в первой инерциальной системе также должно быть спонтанным. Наш вывод состоит в том, что *нет локальной, детерминистической теории, которая могла бы описывать испускание тахиона.* Поскольку это должен быть спонтанный процесс, *тахион не может быть использован для сверхсветовых коммуникаций,* поэтому информация, посланная локальным наблюдателем, должна быть полностью контролируемой. Не возникает парадоксов, связанных с нарушением причинности.

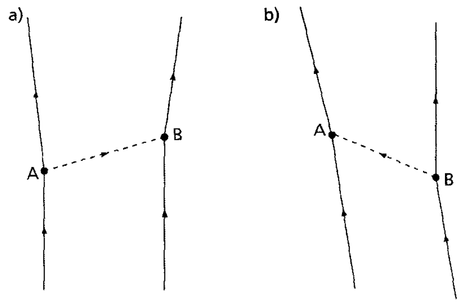

Рисунок 1: Пространственно-временные диаграммы процесса распространения тахиона с точки зрения двух инерциальных наблюдателей: a) частица испущена из A и поглощена в B, b) обратный процесс в другой инерциальной системе.

Для характеристики процесса распада "классической" частицы на данную пару частиц требуется определить шесть компонент импульсов продуктов распада. Имеется только четыре уравнения, выражающих закон сохранения энергии и импульса, так что импульсы продуктов распада не могут быть определены однозначно (за одним исключением, которое мы обсудим позже). По тем же причинам, что и выше, не может быть локальной детерминистической теории, которая могла бы определить импульс испущенного тахиона. Его импульс должен, следовательно, определяться спонтанно.

III. ВСЕ ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ НАБЛЮДАТЕЛИ

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета (нештрихованную и штрихованную), движущиеся одна относительно другой со скоростью *V.* Наша цель – определить наиболее общую форму преобразования координат от одной системы к другой. Мы исходим только из справедливости принципа относительности Галилея. [2]. Отсюда следует, что возможное преобразование должно быть линейным, так что уравнения не выделяют какой-либо момент времени или точки пространства, а коэффициенты преобразования должны быть функциями только относительной скорости. Из принципа относительности мы также получаем обратное преобразование. Предположив, что относительное движение происходит вдоль общей оси x и x', мы находим:

$$\begin{aligned} x' &= A(V)\,x + B(V)\,t, \\ x &= A(-V)\,x' + B(-V)\,t'. \end{aligned} \tag{1}$$

Из определения относительного движения точка $x' = 0$ описывается в нештрихованной системе уравнением $x = Vt$. Следовательно, из первого уравнения системы (1) мы получаем

$$\frac{B(V)}{A(V)} = -V.$$

Используя это тождество, мы можем свести набор возможных преобразований (1) к виду:

$$\begin{aligned} x' &= A(V)(x - Vt), \\ t' &= A(V)\left(t - \frac{A(V)A(-V) - 1}{V^2 A(V)A(-V)} Vx\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим три инерциальные системы, находящиеся в относительном движении вдоль осей $x \parallel x' \parallel x''$. Пусть штрихованная система движется со скоростью V_1 относительно нештрихованной системы, а дважды штрихованная система отсчета движется со скоростью V_2 относительно штрихованной. Определим преобразование между дважды штрихованной и нештрихованной системами координат в виде:

$$\begin{aligned} x'' = {} & A(V_1)A(V_2)x\left(1 + V_1 V_2 \frac{A(V_1)A(-V_1) - 1}{V_1^2 A(V_1)A(-V_1)}\right) \\ & - A(V_1)A(V_2)(V_1 + V_2)t. \end{aligned} \tag{3}$$

Предположим что если объект A движется со скоростью *V* относительно объекта B, тогда B движется относительно A со скоростью *-V.* Следовательн, вышеприведенное преобразование должно оставаться неизменным после взаимной перестановки $V_1 \leftrightarrow V_2$. Следовательно, мы получили условие:

$$\frac{A(V_1)A(-V_1) - 1}{V_1^2 A(V_1)A(-V_1)} = \frac{A(V_2)A(-V_2) - 1}{V_2^2 A(V_2)A(-V_2)}. \tag{4}$$

Это равенство для неизвестной функции двух произвольных аргументов V_1 и V_2 означает, что данная функция должна быть константой:

$$\frac{A(V)A(-V)-1}{V^2A(V)A(-V)} = K. \qquad (5)$$

Рассмотрим систему отсчета с часами, идущими в обратном направлении, так что все скорости имеют противоположный знак. Если обращение времени не изменяет пространственных координат, то из уравнения (2) мы получаем условие $A(-V) = A(V)$, позволяющее нам определить

$$A(V) = \pm\frac{1}{\sqrt{1-KV^2}}$$

После выбора знака, гарантирующего гладкий переход *x'* —> *x* при *V* —> 0, мы получаем окончательный вид преобразования из уравнений (2):

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x-Vt}{\sqrt{1-KV^2}}, \\ t' &= \frac{t-KVx}{\sqrt{1-KV^2}}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Фундаментальная константа *K*, определяющая соотношение между пространственным измерением *x* и временным измерением *t* может быть нулевой, положительной или отрицательной. Первые две возможности отвечают, соответственно, преобразованиям Галилея и Лоренца. Вариант с с отрицательной величиной *K* описывает мир с четырехмерным евклидовым пространством, с четвертым измерением *t*, сжатым соответственно множителю $\sqrt{-K}$, и найденное преобразование в точности является поворотом в плоскости *xt* на угол, для которого $\tan\alpha = \sqrt{-K}V$. Имеются четыре известных пространственно-временных измерения; коэффициенты *K*, описывающие соотношения между парами пространственных измерений, все равны -1, а коэффициенты, связывающие время и пространство, все имеют эмпирическое значение $1/c^2$.

Чтобы определить преобразование в перпендикулярном пространственном направлении, заметим, что оно не должно зависеть от времени. Следовательно, оно может являться только изотропным преобразованием вида $y' = C(V)y$, $z' = C(V)z$. Рассмотрим процесс ввода ключа в замочную скважину со скоростью *V.* Если $|C(V)| < 1$, то в покоящейся системе отсчета замочной скважины ключ сжимается в перпендикулярном направлении и может войти легче. Однако в системе отсчета ключа сжимается скважина, так что ключ вообще не может войти в нее. Аналогичные проблемы возникают при $|C(V)| > 1$, так что мы приходим к выводу, что подходящими являются только значения $C(V) = \pm 1$. Поскольку мы требуем, что при V —> 0 преобразование становилось тождеством, мы получаем $y' = y$ и $z' = z$.

Закон преобразования (6) определен только для досветовых скоростей $V < c$. Однако точно так же можно вывести формулы и для сверхсветовых скоростей. Рассмотрим случай антисимметричной функции $A(-V) = -A(V)$. Это допущение приводит к заключению, что обращение времени $t \to -t$ и, следовательно, $V \to -V$

дает преобразование $x' \to -x'$ и $t' \to t'$. Это следует непосредственно из уравнений (2). Причина этого неожиданно симметричного закона станет ясной, когда мы будем выводить заключительную форму уравнений. Из формулы (5) с *K* = 1/c^2 мы получаем соотношение

$$A(W) = \pm\frac{W/|W|}{\sqrt{W^2/c^2-1}}$$

определенное для *W* > *c* (с этого момента мы будем использовать величины *W* для обозначения сверхсветовых скоростей, а греческие символы – для обозначения величин в сверхсветовых системах отсчета). Внешний множитель W / |W| является всего лишь антисимметричной функцией *W*, равной единице по модулю. Знак функции *A*(*W*) определяется неоднозначно, и мы получаем [3]:

$$\begin{aligned} \chi' &= \pm\frac{W}{|W|}\frac{x-Wt}{\sqrt{W^2/c^2-1}}, \\ \tau' &= \pm\frac{W}{|W|}\frac{t-Wx/c^2}{\sqrt{W^2/c^2-1}}, \end{aligned} \qquad (7)$$

где x' – пространственное, а τ' – временное измерения, связанные со сверхсветовым наблюдателем, которые движется с данной скоростью *W.* Последнее утверждение подкрепляется тем фактом, что временная ось сопутствующей данному объекту системы отсчета должна совпадать с мировой линией этого объекта.

В качестве примера мы рассмотрим наблюдателя, движущегося с бесконечной скоростью вдоль оси *x*. Отсюда следует, что он воспринимает пространственное измерение *x* как временное измерение τ, а временное измерение *t* – как пространственное измерение χ (мы выбрали отрицательный знак):

$$\begin{aligned} \chi &= ct, \\ c\tau &= x. \end{aligned} \qquad (8)$$

Это соотношение уточняет необычную симметрию ранее обсуждавшегося сверхсветового преобразования – операция обращения времени *t* —> *-t* должна быть связана с $\chi \to -\chi$, а не с $\tau \to -\tau$, как в досветовом случае. Для двумерного пространства-времени можно постулировать, что все инерциальные системы отсчета, включая сверхсветовые, полностью равноправны относительно любых законов физики. В четырехмерном пространстве-времени, однако, ситуация гораздо тоньше из-за свойств преобразования остальных координат *y* и *z* [3]. Для вывода закона их преобразования мы можем повторить то же обоснование, что и для досветового случая. В этом случае имеется ненулевой предел скорости, так что поперечные координаты определены с точностью до знака. Обозначим четырехмерное положение сверхсветового наблюдателя с координатами $(\chi', c\tau'_x, c\tau'_y, c\tau'_z)$ и предположим, что остальные координаты равны $c\tau'_y = \pm y$ и $c\tau'_z = \pm z$. Используя эти соотношения и уравнения (7), мы выводим закон преобразования для пространственно-временного интервала:

$$c^2\Delta t^2 - \Delta r^2 = \Delta\chi'^2 - c^2\Delta\tau'^2, \qquad (9)$$

где $r = (x, y, z)$ и $\tau' = (\tau'_x, \tau'_y, \tau'_z)$. Чтобы гарантировать сохранение интервала, мы *определяем* его в сверхсветовой системе отсчета как правосторонний в вышеописанном уравнении. Как мы уже указывали, временная ось сопутствующей объекту системы отсчета должна совпадать с мировой линией объекта, следовательно, τ'_x должна быть временной координатой, а *x'* – пространственной координатой. Природа остальных координат τ'_y и τ'_z соответствует временным измерениям вследствие их знака в метрике (тот же, что и для τ'_x*).* Преобразования (7) вместе с преобразованием перпендикулярных координат принадлежат группе Лоренца, отвечающей досветовой скорости *V* = c^2/w, следовательно, они сохраняют структуру светового конуса пространства-времени. После произвольного преобразования лежащие внутри конуса четырех-векторы остаются там же, лежащие же вне конуса векторы так и остаются вне его.

Новой характеристикой сверхсветового наблюдателя оказывается лишь то, что его времени-подобные четырех-векторы являются (по определению) лежащими вне конуса, а пространственно-подобные четырех-векторы – лежащими внутри конуса. Тот факт, что имеются три временных измерения τ и единственное пространственное измерение χ мы обсудим позже, а здесь лишь предположим, что пространство-время в тахионной инерциальной системе отсчета обладает физическими свойствами, полностью отличными от известных свойств досветовых систем отсчета. Кажется, что это существенно ограничивает возможность формулировки принципа относительности для всех инерциальных систем [3], хотя все досветовые системы отсчета равноправны между собой с релятивистской точки зрения, так же как и все сверхсветовые системы. Однако мы можем выделить более слабый постулат, необходимый для любой схемы, относящейся к понятию пространства-времени. Постулируемая версия принципа относительности для всех систем отсчета состоит в следующем: *если некоторый физический процесс или событие имеет место в одной инерциальной системе, он также будет иметь место в любой другой инерциальной системе.* Рассматриваемые процесс или событие имеют весьма разные свойства в зависимости характера метрики в досветовых и сверхсветовых системах отсчета, но сам факт их существования не может зависеть от выбора системы отсчета.

Преобразование между двумя сверхсветовыми системами отсчета может быть выведено уже исходя из обращенных преобразований между покоящейся системой и двумя произвольными сверхсветовыми системами. Оказывается, что такое преобразование не зависит от знака преобразования (6), это показывает, что выбор знака в определенной степени есть вопрос соглашения.

Преобразование Лоренца между досветовыми и сверхсветовыми системами отсчета имеет некоторые проверяемые свойства, например, некоторый сверхсветовой объект, который движется со скоростью *w* вдоль оси *x*, наблюдается с коэффициентом продольного сжатия таким образом, что его длина Δx равняется:

$$\Delta x = \pm \frac{w}{|w|} \Delta\chi \sqrt{w^2/c^2 - 1}, \qquad (10)$$

где $\Delta\chi$ – длина объекта в покоящейся системе. Имеется также новое выражение для течения времени сверхсветовых часов:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \mp \frac{w}{|w|} \frac{\Delta \tau_x}{\sqrt{w^2/c^2 - 1}}, \\ \Delta \tau_y &= \Delta \tau_z = 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

так что при $w = \sqrt{2}c$ интервалы длины и времени одинаковы в покоящейся и в сопутствующей тахиону системах отсчета.

Наконец, в Приложении А мы выводим и обсуждаем простейшие варианты для четырех-вектора энергии-импульса тахиона с параметром массы μ, спиральностью $\acute{s} = \pm 1$ (неизбежной при описании) и скоростью *w:*

$$\begin{aligned} E &= \frac{\acute{s}\mu c^2}{\sqrt{w^2/c^2 - 1}}, \\ p &= \frac{\acute{s}\mu \boldsymbol{w}}{\sqrt{w^2/c^2 - 1}}, \end{aligned} \qquad (12)$$

где закон преобразования для $\acute{s}$ имеет вид $\acute{s}' = \acute{s}\,\mathrm{sgn}\left(c^2 - \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{V}\right)$. Рассмотрим распад, представленный на рис. 2а, где распадающаяся частица обращает свою скорость при испускании бесконечно быстро движущегося тахиона. Импульс тахиона равняется *μc*, а направление испускания совпадает с направлением скорости распадающейся частицы. Для заданных масс *m* и *μ,* а также скорости *v* другие процессы невозможны – это и есть вышеупомянутое исключение, когда законы сохранения однозначно определяют импульсы продуктов распада. В то время, как импульс полностью определен, положение тахиона полностью неизвестно, поскольку он распространяется с бесконечной скоростью. Представляется, что это соответствует принципу неопределенности Гейзенберга.

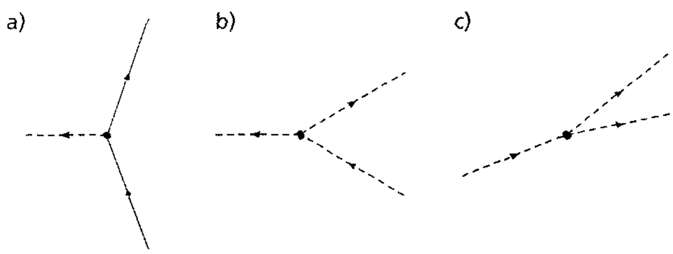

Рисунок 2: Упругое испускание тахиона: a) массивной частицей, b) другим тахионом, c) процесс (b) с точки зрения другого инерциального наблюдателя.

IV. ВЫДЕЛЕННЫЕ МАСШТАБЫ

Мы показали, что процесс излучения, изображенный на рис. 2а, не может быть описан с помощью локальной детерминистической теории. То же следует для процесса, изображенного на рис. 2b: это можно видеть, учтя точку зрения другого наблюдателя (рис. 2c). Ясно, что невозможно приписать какому-либо из тахионов скрытый параметр, который мог бы определять процесс и момент его течения.

Однако, согласно преобразованию (8), диаграмма 2b показывает, как бесконечно быстро движущийся наблюдатель воспринимает процесс распада массивной частицы на две такие частицы. На основании принципа относительности мы заключаем, что концепция скрытых переменных, определяющих процесс распада массивных частиц, не может быть включена также и в досветовые инерциальные системы отсчета. Если нет локального детерминистического параметра в сверхсветовых системах отсчета, то не может быть локального детерминистического параметра в досветовых системах. Следовательно, *все возможные процессы распада должны быть спонтанными.*

Вышеприведенное обоснование согласуется с нашим знанием происходящих процессов для элементарных частиц, но кажется противоречащим нашему макроскопическому опыту для массивных частиц. Например, обычная бомба разрывается на много частей в четко определенный момент времени. Очевидно, что этот момент может быть предсказан заранее. Мы предлагаем следующее решение данного парадокса.

Акт распада является акаузальным феноменом, т.е. разные частицы будут распадаться в случайные моменты времени с некоторой плотностью вероятности ϱ, определенной для распадающейся частицы в единицу времени (если частица не обладает "памятью" о своем прошлом, то величина ϱ должна быть постоянной). Единица измерения для ϱ не может быть выражена только через единицы массы и скорости. Следовательно, должна существовать новая фундаментальная константа, имеющая размерность времени или, что эквивалентно, пространства. Новая константа может иметь также некоторую другую размерность, выраженную через единицы времени и использующую массу и скорость. По историческим причинам мы предполагаем, что эта фундаментальная константа должна иметь размерность углового момента – постоянную Планка $\hbar$*:*

$$[\varrho] = \left[\frac{\mu c^2}{\hbar}\right]. \qquad (13)$$

Имеется еще только одна известная фундаментальная константа, которая имеет размерность, позволяющую получить единицу времени – это гравитационная постоянная G в плоском пространстве-времени, однако она не может играть осмысленную роль.

Рассмотрение спонтанных актов распада неизбежно приводит к выделенному временному масштабу процесса. Этот масштаб, пропорциональный $\hbar$, для большинства процессов оказывается намного короче, чем типичное время наблюдения процесса в макроскопическом мире. Следовательно, для большинства „макроскопических" процессов вероятности возможных распадов близки к единице.

Описание классической области не связано с рассмотрением систем, содержащих большое число подсистем, скорее – с учетом временных (или пространственных) масштабов, много больших чем типичные масштабы процессов распада. Имеется множество физических систем, содержащих большое число частиц, которые проявляют квантовые свойства при наблюдении в характерных для них масштабах. Свободный нейтрон имеет среднее время жизни порядка 10 минут. Это значит, что бомба, взрыв которой инициируется при распаде единственного нейтрона, взорвется в случайный момент времени, вносящий фундаментальную неопределенность в макроскопический мир. Этот пример иллюстрирует тот факт, что не число частиц, а типичный временной масштаб определяет классический (или квантовый) характер процесса.

Возвращаясь к примеру со взрывом бомбы, мы приходим к выводу, что неопределенность момента взрыва все же имеется, хотя и в рамках очень малого промежутка времени. Вероятность взрыва в течение микросекунды практически равна единице, вот почему такой взрыв может казаться детерминистическим при наблюдении в классических масштабах.

Другой интересный вопрос, вытекающий из того, что распад должен быть спонтанным: если мы не можем посылать сообщения с помощью источника тахионов, то каким образом мы посылаем сообщения с помощью источника массивных частиц? Эта асимметрия возникает в силу того, что мы можем экранировать источник массивных частиц и модулировать сигнал, открывая и закрывая источник, но мы не можем делать это с тахионами. Из диаграмм на рис. 1 следует, что каждый объект, способный поглощать тахионы, должен также испускать их, следовательно, экранировка невозможна.

V. СУПЕРПОЗИЦИЯ МИРОВЫХ ЛИНИЙ

Рассмотрим систему отсчета (*ct, x*), в которой частица с хорошо определенным импульсом испускается в А – рис. 3а. Пусть она отражается в α, а затем попадает в В. Частица, попавшая в В, должна сначала пройти путь Аα, а затем проделать путь αВ. Следовательно, если наблюдатель помещает два детектора в точках пересечения двух путей, то обнаружение частицы на пути Аα предшествует ее обнаружению на пути αВ, и *vice versa.* Если частица обнаружена на пути αВ, то она не могла быть поглощена ранее на пути Аα. Из принципа относительности следует, что та же самая ситуация должна иметь место во всех инерциальных системах отсчета.

Другой наблюдатель, движущийся бесконечно быстро вдоль оси *x*, который описывает то же самое пространство-время в координатах $(c\tau, \chi)$, будет интерпретировать тот же ход событий по-другому. Согласно его точке зрения, имеется источник, расположенный в α, который испускает частицу с неопределенным импульсом. После испускания частица может попасть как в точку А, так и в точку В. Однако, если наблюдатель разместит два детектора на путях αА и αВ, то только один из этих детекторов может поглотить частицу, испущенную из α. Это показывает, что мы должны приписать две мировые линии одной частице, но если мы пытаемся ее локализовать, то ее присутствие можно выявить только на одной из них – мы будем называть это явление *суперпозицией* мировых линий.

Попробуем подыскать релятивистски инвариантное выражение, характеризующее пространственно-временной путь частицы, движущейся по двум мировым линиям. Искомое инвариантное выражение $\mathcal{P}_{\text{path}}$ для заданного двойного пути может зависеть только от релятивистских инвариантов, сопоставленных этому пространственно-временному пути и энергии-импульсу частицы.

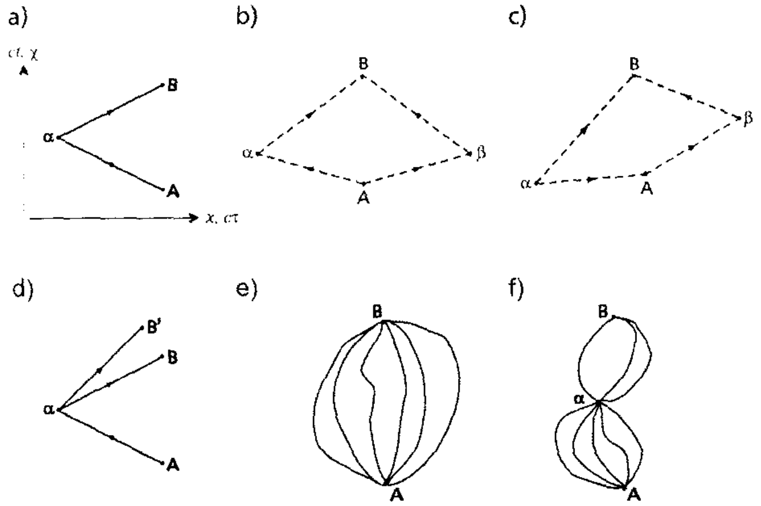

Рисунок 3: Пространственно-временные диаграммы, показывающие:

- движение частицы, наблюдаемое из двух инерциальных систем отсчета. В покоящейся системе (*ct, x*) тахион вылетает из А, отражается в α и возвращается назад в В. В системе отсчета, движущейся бесконечно быстро $(c\tau, \chi)$, источник α испускает частицу, которое одновременно движется в А и В;
- частица, испущенная в состоянии суперпозиции из А, отражается в α и в β, а затем детектируется в В;
- с) как процесс (b) представляется другому инерциальному наблюдателю;
- d) частица, испущенная в А, переходит в состояние суперпозиции после рассеяния в α - другой наблюдатель видит тройную суперпозицию частицы, испущенной в α;
- е) множественные непересекающиеся пути, возможные для частицы, движущейся между А и В;
- f) пересекающиеся пути – пример неклассического поведения частицы в α, которое может быть описано с помощью правил классической вероятности.

Существует *только один* инвариант, не зависящий от формы пути – релятивистское скалярное произведение четырех-координат и четырех-импульсов – назовем его фазой ϕ. Для частицы с энергией $\boldsymbol{E}$ и импульсом ***p***, движущейся вдоль заданного пути, фаза равняется:

$$\phi_{\text{path}} = \hbar^{-1} \int_{\text{path}} (E\,\mathrm{d}t - \boldsymbol{p} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}), \qquad (14)$$

где коэффициент пропорциональности введен для сохранения размерности фазы. Фаза, умноженная на постоянный множитель $\hbar/mc^2$, может быть также интерпретирована как собственное время, или классическое действие, ассоциированное с этим путем. Посмотрим, как такой путь преобразуется в другой системе отсчета. Рассмотрим ситуацию, когда частица-тахион испускается в А (рис. 3b) и отражается в α и β так, что скорость на обоих путях уменьшается. Оба пути не различаются, следовательно, инвариант $\mathcal{P}$ должен быть симметричной функции фазы, вычисленной для обоих путей:

$$\mathcal{P}(\phi_1, \phi_2) = \mathcal{P}(\phi_2, \phi_1), \qquad (15)$$

где индексы обозначают пути $\mathsf{A}\alpha\mathsf{B}$ и $\mathsf{A}\beta\mathsf{B}$, пересекаемые частицей (рис 3b). Наблюдение того же процесса из движущейся системы отсчета дает иную картину ситуации (рис. 3c). Движущийся наблюдатель заявляет, что частица испущена в α и β и следует двумя путями. Один из них приводит непосредственно в B, а на другом частица рассеивается дважды – в α и β и, следовательно, выявляет B. В этой инерциальной системе отсчета инвариант $\mathcal{P}$ описывается путем 1', обозначающим αB, и путем 2', обозначающим AβB, с соответствующими фазами:

$$\begin{aligned} \phi_{1'} &= \phi_1 - \phi_{\mathsf{A}\alpha}, \\ \phi_{2'} &= \phi_2 + \phi_{\alpha\mathsf{A}}, \end{aligned} \qquad (16)$$

где $\phi_{\alpha\mathsf{A}} = -\phi_{\mathsf{A}\alpha}$. Для произвольного процесса, описываемого замкнутой пространственно-временной петлей, как на рис. 3b или 3c, фаза $\phi_{\alpha\mathsf{A}}$ может иметь произвольное значение, следовательно, из условия

$$\mathcal{P}(\phi_1, \phi_2) = \mathcal{P}(\phi_{1'}, \phi_{2'}), \qquad (17)$$

и уравнения (15) следует, что $\mathcal{P}$ должно быть симметричной функцией только разности $\mathcal{P}(|\phi_1 - \phi_2|)$. Мы видим, что такой инвариант не может быть разложен в сумму функций $\mathcal{P}$, зависящих только от одного из путей:

$$\mathcal{P}(|\phi_1 - \phi_2|) \neq P(\phi_1) + P(\phi_2). \qquad (18)$$

Задача о движении частицы вдоль двух пространственно-временных путей может быть обобщена на много путей, используя метод индукции. Предположим, что частица, испущенная в A и отраженная в α, сама по себе находится в суперпозиции двух мировых линий (рис. 3d). Одна из линий ведет непосредственно к событию B, в то время как другая – к другому событию B'. Другой наблюдатель процесса находит частицу в суперпозиции трех мировых линий, исходящих из события α. Дальнейшие обобщения очевидны.

Релятивистски инвариантное описание *n* непересекающихся пространственно-временных путей, связывающих два события, будем обозначать через $\mathcal{P}^{(n)}(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ (см. рис. 3e). С целью определить эту величину в явной форме мы постулируем следующие четыре аксиомы.

- Мы предположим, что инвариант $\mathcal{P}$ должен быть гладкой функцией только фаз и не должен зависеть от топологии пути.
- Эта функция должна быть также полностью симметричной, т.е. для произвольной перестановки π n-элементного набора мы имеем:

$$\mathcal{P}^{(n)}(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n) = \mathcal{P}^{(n)}(\phi_{\pi(1)}, \phi_{\pi(2)}, \ldots, \phi_{\pi(n)}). \quad (19)$$

- Третья аксиома требует, чтобы эта функция не зависела от стрелы времени, следовательно, она должна быть инвариантной относительно направления времени:

$$\mathcal{P}^{(n)}(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n) = \mathcal{P}^{(n)}(-\phi_1, -\phi_2, \ldots, -\phi_n). \quad (20)$$

- С целью ввести последнюю аксиому вернемся к обсуждению выражения (18). Согласно этому уравнению, в простейшем случае двух путей инвариант $\mathcal{P}$ не раскладывается в сумму двух выражений, как требуется для классической вероятности [4]. Это следствие неклассического характера суперпозиции. Однако имеется специальный случай, когда правила классической вероятности могут применяться к развиваемому здесь формализму. Четвертая аксиома выражает вероятностно-подобный характер инварианта $\mathcal{P}$. Рассмотрим группу пересекающихся путей, показанную на рис. 3f – если *n* путей, связывающих A и α, по которым следует частица, пересекаются с *m* путями между α и B, то присутствие частицы в пространственно-временной точке α, определено. В этом случае мы можем применить закон композиции классических вероятностей. Если наша инвариантная функция $\mathcal{P}$ должна выражать вероятность для частицы проделать составной путь, то в рассмотренном случае эта вероятность должна быть произведением двух вероятностей движения вдоль частичных путей, связывающих A с α и α с B. Это и есть содержание нашей последней аксиомы:

$$\mathcal{P}^{(n)}(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)\mathcal{P}^{(m)}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = \mathcal{P}^{(nm)}(\phi_1 + \xi_1, \phi_1 + \xi_2, \phi_1 + \xi_3, \ldots, \phi_n + \xi_m). \quad (21)$$

Поскольку мы можем произвести перестановку аргументов, появляющихся с левой стороны этого уравнения, то аргументы функции с правой стороны должны включать суммы всех возможных пар фаз $\phi_i + \xi_j$. В вышеприведенном условии мы также использовали первую аксиому, предполагающую, что инвариантное выражение, которое описывает *n* непересекающихся путей, изображенных на рис. 3e, совпадает с выражением, описывающем *n* пересекающихся путей, показанных на рис. 3f. Подчеркнем, что вышеуказанный набор аксиом содержит необходимые, но недостаточные условия для того, чтобы инвариант $\mathcal{P}^{(n)}(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ определял вероятность. Легко проверить, что следующая функция является гладкой и удовлетворяет условиям (19), (20) и (21):

$$\mathcal{P}^{(n)}(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n) = \frac{1}{n^A}\left(e^{\alpha\phi_1} + e^{\alpha\phi_2} + \ldots + e^{\alpha\phi_n}\right)\left(e^{-\alpha\phi_1} + e^{-\alpha\phi_2} + \ldots + e^{-\alpha\phi_n}\right), \quad (22)$$

где A и α являются произвольными константами. В Приложении B мы показываем, что общее решение задачи дается произведением произвольно большого числа базисных решений вида (22).

Для бесконечного числа путей выражение (22) становится бесконечным для любого действительного α. С целью сохранить инвариант конечным для произвольных фаз необходимо учитывать только мнимые $\alpha = \pm i|\alpha|$. Модуль $|\alpha|$

может быть ассоциирован с произвольной величиной постоянной Планка $\hbar$, так что без потери общности для базисного решения мы можем положить $|\alpha| = 1$. Если мы рассмотрим *n* идентичных путей и потребуем, чтобы для $\mathcal{P}^{(n)}(\phi, \phi, \ldots, \phi) = \mathcal{P}^{(1)}(\phi)$ выполнялось условие $A = 2$. Следовательно, мы можем ввести следующее обозначение:

$$\langle B|A\rangle = \frac{1}{n}\left(e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2} + \ldots + e^{i\phi_n}\right), \qquad (23)$$

где *A* и *B* – два пространственно-временных события, сумма берется по всем n разрешенным путям, соединяющим события *A* и *B.* В этих обозначениях мы имеем $\langle A|B\rangle^* = \langle B|A\rangle$, и наш простейший вероятностно-подобный инвариант сводится к:

$$\mathcal{P}^{(n)}(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n) = \langle A|B\rangle\langle B|A\rangle. \qquad (24)$$

Итак, это работает. Рассмотрением бесконечного числа путей, связывающих два пространственно-временных события, мы завершаем сопоставление с теорией Фейнмана, в которой следует учитывать суммирование по всем возможным историям с комплексными амплитудами, основанных на классическом действии, связанным с каждым путем.

Эта картина может быть интуитивно понята на основе необычной гипотезы, согласно которой в классе сверхсветовых инерциальных систем отсчета имеется три временных измерения, и время в каждом из них течет в точности так, как это происходит с единственным временным измерением в досветовых системах отсчета. Последнее утверждение требует отказа от понятия мировой линии при учете сверхсветовых наблюдателей. Для таких наблюдателей нет выделенной стрелы времени, следовательно, естественно допустить, что все объекты, наблюдаемые сверхсветовым наблюдателем, становятся старше вдоль всех направлений времени τ. Следовательно, в произвольной сверхсветовой системе отсчета каждый физический объект, пересекающий заданную точку пространства-времени, должен иметь трехмерную мировую линию – *мировую сферу*, связанную с ним. Вышеприведенный специфический принцип приводит к хорошо известным экспериментальным фактам, наблюдаемым в досветовых системах отсчета. Из принципа относительности следует, что в произвольной досветовой системе отсчета каждая частица должна также обладать пространственно-временной *сферой*, соответствующей ей в каждом пространственно-временном местоположении частицы. Последнее утверждение известно как часть принципа Гюйгенса, первоначально сформулированного для описания поведения света, и много лет спустя открытого для применения также и в других областях. Этот принцип утверждает, что *каждая точка в пространстве, пересекаемая светом, является источником новой сферической волны.* Из этого следует, что для описания движения частицы необходимо учитывать все возможные пространственно-временные пути, что мы только что вывели из четырех элементарных аксиом.

VI. СИММЕТРИИ

Рассмотрим сценарий, когда частица, описываемая одним из четырех-импульсов (12), действительно существует в Природе. С целью вычислить ее энергию и импульс необходимо определить не только массу и скорость частицы, но также и дополнительный параметр $\acute{s}$. Известной скалярной внутренней степенью свободы свободной незаряженной частицы является только ее спиральность. Рассмотрим далее случай, когда $\acute{s}$ обладает симметричными свойствами спиральности. Преобразование обращения времени T оставляет спиральность неизменной, в то время как пространственное отражение P меняет знак:

$$\begin{aligned} \mathsf{T}\acute{s} &= \acute{s} \\ \mathsf{P}\acute{s} &= -\acute{s}. \end{aligned} \tag{25}$$

Предположим, что процесс распада массивной частицы и частицы, описываемой уравнением (12), имеет место, как показано на рис. 1а. Предположим, полные энергия и импульс сохраняются. Операция обращения времени меняет знаки скоростей, следовательно, оба четырех-вектора (12) преобразуются идентично, и T является симметрией процесса. Однако из-за четности преобразования P рассматриваемые четырех-векторы меняются различным образом, что означает, что после пространственного обращения P ни энергия, ни импульс не сохранятся в ходе процесса. Это показывает, что данный процесс не должен происходить.

Приведенный анализ основан на допущении, что $\acute{s}$ обладает свойствами спиральности. Однако, можно учитывать частицы различных типов, для которых $\acute{s}$ подчиняется другим правилам преобразования, так что другие типы симметрии должны использоваться для рассматриваемых типов распада, в частности, обращение времени может не быть симметричным. Если мы предполагаем, что сопряжение C обращает направление $\acute{s}$ (что подробно обсуждается в Приложении А), и требуем, чтобы общая операция CPT обладала симметрией, то и четность, и симметрия обращения времени должна нарушаться при взаимодействии данных частиц.

Сказанное может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} \mathsf{T}\acute{s} &= -\acute{s} \\ \mathsf{P}\acute{s} &= \acute{s}. \end{aligned} \tag{26}$$

Существование тахионов, взаимодействующих с обычной материей, чьи энергия и импульс зависят от скорости и параметра спиральности $\acute{s}$ согласно выражению (12), приводит к нарушению симметрии четности, которая, как мы знаем, не сохраняется в слабых взаимодействиях. Это заставляет предположить, что тахионные частицы играют некоторую роль в слабых взаимодействиях, представленная форма описания этих взаимодействий должна пониматься всего лишь как эффективная теория.

VII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами показано, что нарушение законов причинности является следствием расширения принципа относительности на сверхсветовые системы отсчета и соответствует известным законам, вытекающим из базовых принципов квантовой теории. В этом безумном утверждении есть система – отсюда следует, что квантовая теория является релятивистской в самых своих корнях, и что термин "нерелятивистская квантовая механика" является оксюмороном подобно "нерелятивистской электродинамике". Представленные результаты не говорят об обязательном существовании тахионов, но было бы весьма неожиданным, если бы их действительно не было. Мы не приводим новых предсказаний, за исключением предположения о роли тахионов в слабых взаимодействиях. Далее, более глубокое понимание корней квантовой теории может оказаться полезным при построении еще не построенной квантовой теории гравитации. Представляется необходимым учет подобной теории при анализе свойств не только досветовых, но и сверхсветовых классов локальных наблюдателей.

Благодарности

Я хотел бы поблагодарить Iwo Bialynicki-Birula, Szymon Charzynski, Tomasz Maslowski, Bogdan Mielnik, Jan Mostowski, Krzysztof Pachucki и Pawel Zin за интересные обсуждения.

[1] J. S. Bell, Physics 1, 195 (1964).
[2] Considerations based on similar assumptions, but in a much more complicated form appeared for the first time in W. Ignatowsky, Arch. Math. Phys 17 (1910) *and* P. Frank and H. Rothe, Ann. der Phys. **34,** 825 (1911); the presented reasoning is a modified version of the derivation by A. Szymacha, in *Przestrzen i ruch* (Wydawnictwo UW, Warsaw 1997).
[3] L. Machildon, A. P. Antippa, and A. E. Everett, Can. J. Phys. **61,** 256 (1983); L. Machildon, A. F. Antippa, and E. Everett, Phys. Rev. D 27, 1740 (1983).
[4] R. T. Cox, Am. J. Phys. 14, 1 (1946).
[5] E. Wigner, Ann. Math. **40,** 149 (1939).
[6] R. P. Feynman, Phys. Rev. T6, 167 (1949).
[7] W. Sierpinski, *Zasady Algebry Wyzszej,* (Warszawa 1946).
[8] J. Aczel, *Functional Equations and Their Applications* (Academic Press, New York 1966).

APPENDIX A: DERIVATION OF THE ENERGY-MOMENTUM FOUR-VECTORS

A four-vector $A^{\Box} \equiv (A^0, \boldsymbol{A})$, by the definition transforms to the inertial frame moving with the velocity $\boldsymbol{V}$ according to the formulas:

$$A^{0\prime} = \frac{A^0 - \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{V}}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$
$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{V}}{V^2}\boldsymbol{V} + \frac{\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{V}}{V^2}\boldsymbol{V} - A^0\frac{\boldsymbol{V}}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \qquad \text{(A1)}$$

We are looking for all the four-vectors $A^{\Box}$ that do transform in a covariant way, thus obeying the equation:

$$A^{\Box\prime}(v, \mathcal{A}^{\Box}) = A^{\Box}(v', \mathcal{A}'^{\Box}), \tag{A2}$$

where v is velocity transforming according to the formula:

$$v' = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(v - \frac{v\cdot V}{V^2}V\right) - V + \frac{v\cdot V}{V^2}V}{1-\frac{v\cdot V}{c^2}}, \tag{A3}$$

and $\mathcal{A}^{\Box} \equiv (\mathcal{A}^0, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ is an additional parameter - a value of the four-vector $A^{\Box}$ in a selected inertial frame.

It turns out that there are only four linearly independent four-vectors $A^{\Box}$ obeying the condition (A2):

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right), \tag{A4a}$$

$$\left(\frac{s\cdot v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, s - \frac{s\cdot v}{v^2}v + \frac{(s\cdot v)v/v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right), \tag{A4b}$$

$$\left(\frac{\mathrm{sgn}\,(s\cdot w)}{\sqrt{w^2/c^2-1}}, \frac{\mathrm{sgn}\,(s\cdot w)\,w/c}{\sqrt{w^2/c^2-1}}\right), \tag{A4c}$$

$$\left(\frac{\frac{w^2/c^2}{\sqrt{w^2/c^2-1}} - |s\cdot w|/c}{|s\cdot w|/c - \sqrt{w^2/c^2-1}}, \frac{\frac{w/c}{\sqrt{w^2/c^2-1}} - \mathrm{sgn}(s\cdot w)s}{|s\cdot w|/c - \sqrt{w^2/c^2-1}}\right), \tag{A4d}$$

where the function $\mathrm{sgn}(x)$ returns the sign of its argument x and s is a dimensionless unit vector or pseudo-vector undergoing a Wigner-Thomas precession by Lorentz transform. The first pair of four-vectors is defined for subluminal velocities $|v| < c$ and the second pair for the superluminal velocities $|w| > c$. Moreover the parameters determining the four-vectors (A4c) and (A4d) must obey the condition $w^2 - c^2 < (s\cdot w)^2$. The proof is following.

Suppose that the frame of reference for which $A^{\Box} = \mathcal{A}^{\Box}$ is the frame for which $v = 0$ then the transition to a frame moving with a relative velocity $-V$, for which $v' = V$ yields:

$$\begin{aligned} A^0(V, \mathcal{A}^{\Box}) &= \frac{\mathcal{A}^0 + \frac{\boldsymbol{\mathcal{A}}\cdot V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \\ A(V, \mathcal{A}^{\Box}) &= \boldsymbol{\mathcal{A}} - \frac{\boldsymbol{\mathcal{A}}\cdot V}{V^2}V + \frac{\frac{\boldsymbol{\mathcal{A}}\cdot V}{V^2}V + \mathcal{A}^0\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \end{aligned} \tag{A5}$$

Assuming that $\mathcal{A}^{\Box} \equiv (1, 0)$ and replacing V with v we obtain the inside-cone four-vector (A4a). Taking $\mathcal{A}^{\Box} \equiv (0, s)$ we get the outside-cone four-vector (A4b).

Let us discuss the transformation rules for the direction s parameterizing the four-vector (A4b). Let us denote the Lorentz transformation for the velocity V with $\Lambda(V)$ and the velocity transformation (A3) with $\Gamma(V)$. The covariance condition (A2) in an arbitrary inertial frame takes the following form:

$$\Lambda(V)A^{\Box}(v, s) = A^{\Box}(\Gamma(V)v, s'), \tag{A6}$$

where s' is unknown. Using the definition of s: $A^{\Box}(v, s) = \Lambda(-v)(0, s)$ and the property of boosts $\Lambda^{-1}(V) = \Lambda(-V)$ we obtain the relation:

$$(0, s') = \Lambda(\Gamma(V)v)\Lambda(V)\Lambda(-v)(0, s). \tag{A7}$$

The above series of boosts relating three inertial frames in a non-collinear relative motion is a spatial rotation [5] called the Wigner-Thomas rotation. Such transformation does not affect the temporal coordinate of the four-vector and therefore there are no further complications in the transformation law of the four-vector (A4a).

Let us now consider a situation, when in a given frame of reference the velocity parameter has the direction s and an infinite magnitude. Now we choose this frame to define $\mathcal{A}^{\Box}$. The transformation formula (A3) with the frame's relative velocity $-V$ after replacing v' with w yields:

$$\frac{s\cdot V}{c^2}w = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(s - \frac{s\cdot V}{V^2}V\right) + \frac{s\cdot V}{V^2}V. \tag{A8}$$

Let us notice that reversing the sign of s in the equation (A8) does not change the equation itself, therefore the relations between the velocities w and V remain unchanged. This means that s can have transformation properties of a vector or a pseudo-vector, which has very important implications to the symmetries of the collision processes discussed in Sec. VI.

The transformation law for the four-vector (A2) in the considered frame of reference has the form:

$$\begin{aligned} A^0(w, \mathcal{A}^{\Box}) &= \frac{\mathcal{A}^0 + \frac{\boldsymbol{\mathcal{A}}\cdot V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \\ A(w, \mathcal{A}^{\Box}) &= \boldsymbol{\mathcal{A}} - \frac{\boldsymbol{\mathcal{A}}\cdot V}{V^2}V + \frac{\frac{\boldsymbol{\mathcal{A}}\cdot V}{V^2}V + \mathcal{A}^0\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned} \tag{A9}$$

Taking $\mathcal{A}^{\Box} \equiv (0, s)$ (s is the only preferred direction in space; moreover this condition guarantees that A being a candidate for momentum has the direction of velocity) and using (A8) we get:

$$\begin{aligned} A^0(w, s) &= \frac{\frac{s\cdot V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \\ A(w, s) &= \frac{\frac{s\cdot V}{c}\frac{w}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned} \tag{A10}$$

The above four-vector is expressed as a function of the velocity V that can be interpreted as the relative velocity of a frame in which w attains infinite magnitude and the direction s. We wish now to express the four-vector as an explicit function of w and s.

Let us take a scalar product of the equation (A8) with the (pseudo)vector s. We obtain the condition $(s\cdot V)(s\cdot w)>0$. Taking a square of the equation (A8) and using the above identity we get:

$$\frac{s\cdot V}{c}=\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\sqrt{\frac{w^2}{c^2}-1}}\operatorname{sgn}(s\cdot w). \tag{A11}$$

After putting this expression into (A10) we obtain the outside-cone four-vector (A4c).

The last of the four-vectors (A4) is obtained by assuming in equations (A9) the condition $\mathcal{A}=(1,0)$ leading to:

$$\begin{aligned} A^0(w,s) &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \\ A(w,s) &= \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned} \tag{A12}$$

To express the above formulas with the velocity w and s we will transform the equation (A8) to a new form. Using the formula (A11) we get:

$$\frac{V}{1+\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=w-\operatorname{sgn}(s\cdot w)\sqrt{w^2-c^2}s. \tag{A13}$$

Taking a square of the equation (A13) we determine the Lorentz factor:

$$\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}=\frac{|s\cdot w|-\sqrt{w^2-c^2}}{\frac{w^2}{\sqrt{w^2-c^2}}-|s\cdot w|}. \tag{A14}$$

Hence the explicit form of the relative velocity of the two considered inertial frames:

$$V=c^2\frac{w-\operatorname{sgn}(s\cdot w)\sqrt{w^2-c^2}s}{w^2-|s\cdot w|\sqrt{w^2-c^2}}, \tag{A15}$$

and the inside-cone four-vector (A4d). Taking a scalar product of the equation (A15) with w we obtain the equality $w\cdot V=c^2$ determining the relation between the superluminal velocity w and the velocity V of the inertial frame in which w becomes infinite.

The covariance condition (A6) for the four-vector (A4c) in an arbitrary inertial frame leads to the equation:

$$\frac{\operatorname{sgn}(s\cdot w)}{\sqrt{w^2/c^2-1}}\frac{1-\frac{w\cdot\widetilde{V}}{c^2}}{\sqrt{1-\widetilde{V}^2/c^2}}=\frac{\operatorname{sgn}(s'\cdot w')}{\sqrt{w'^2/c^2-1}}, \tag{A16}$$

where w' is the velocity and s' the direction parameterizing the four-vector (A4c) in a new inertial frame moving with a relative velocity $\widetilde{V}$. Taking the square of the equation (A3) and using it in the above expression we obtain:

$$\operatorname{sgn}(s'\cdot w')=\operatorname{sgn}(s\cdot w)\operatorname{sgn}\left(c^2-w\cdot\widetilde{V}\right). \tag{A17}$$

During the transformation to a new inertial frame, the direction s follows in general the Wigner-Thomas precession. That's why the sign of the energy and momentum of a tachyon is changed if and only if the relative velocity $\widetilde{V}$ of a new inertial frame is such that $w\cdot\widetilde{V}>c^2$, i.e. the tachyon becomes an anti-tachyon. Let us find the transformation law for the direction s. From the covariance requirement (A6) we obtain:

$$\Lambda(\widetilde{V})A^{\square}(w,s)=A^{\square}(w',s'), \tag{A18}$$

where $\widetilde{V}$ is the velocity of the new inertial frame, $w'=\Gamma(\widetilde{V})w$ and s' is unknown. This condition for the four-vectors (A4c) and (A4d) yields, respectively:

$$\begin{aligned} \Lambda(V(w',s'))\Lambda(\widetilde{V})\Lambda(-V(w,s))(0,s) &= (0,s'), \\ \Lambda(V(w',s'))\Lambda(\widetilde{V})\Lambda(-V(w,s))(1,0) &= (1,0), \end{aligned} \tag{A19}$$

where $V(w,s)$ is given by the expression (A15). The above equations can be satisfied only if the three consecutive Lorentz transformations on the left-hand side are equivalent to some Wigner-Thomas rotation. This is possible if and only if transformations' arguments are related via the velocity transformation (A3):

$$V(w',s')=V'(w,s), \tag{A20}$$

where $V'=\Gamma(\widetilde{V})V$. Substituting it into the first of the equations (A19) we obtain the condition defining the parameter s in a frame moving with the velocity $\widetilde{V}$:

$$s'=\Lambda(\Gamma(\widetilde{V})V(w,s))\Lambda(\widetilde{V})\Lambda(-V(w,s))s. \tag{A21}$$

At the end, let us notice that the magnitude of the velocity $V(w,s)$ can't exceed the magnitude of c. Taking the square of the equation (A13) and imposing this condition we obtain the following inequality:

$$w^2-c^2<(s\cdot w)^2, \tag{A22}$$

that limits the choice of possible parameters of the four-vectors (A4c) and (A4d) in subluminal frames.

Energy and momentum of a tachyon with a mass parameter μ, velocity w and "helicity" $\acute{s}=\operatorname{sgn}(s\cdot w)$ given by the expression (A4c) or (12) have the properties that energy tends to zero and momentum decreases to the minimum value μc when the velocity increases. Energy and momentum increases to infinity when the velocity tends to the velocity of light, so crossing the border of $|w|=c$ is not energetically possible. Therefore in the two-dimensional case the behavior of tachyons is fully analogical to the behavior if massive particles if only we interchange the temporal and spatial components of the considered four-vectors.

From the velocity transformation formula (A3) for the superluminal velocities one can conclude that observing a tachyon moving with the velocity $\boldsymbol{w}$ from a reference frame following the tachyon with a velocity $\boldsymbol{V}$ increases, not decreases the tachyon's velocity. When the velocity $\boldsymbol{V}$ of the inertial frame is such that $\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{V}=c^2$, the tachyon escapes with an infinite velocity. In an inertial frame such that $\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{V}>c^2$, the tachyon's energy becomes negative and its momentum gets reversed in respect to the tachyon's velocity. In the spirit of Feynman one can say that in this inertial frame the tachyon becomes its anti-particle [6]. If we accompany each world-line with an arrow pointing towards the direction of the propagation in spacetime then a tachyon that moves in a stationary frame with the velocity $\boldsymbol{w}$ ahead in time, observed from the inertial frame for which $\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{V}>c^2$ moves backwards in time. To make sure that the emission of a tachyon is fully equivalent to an absorption of an anti-tachyon we have to prove that the energy and momentum reverse their signs in the same inertial frame in which the velocity becomes infinite, so that reversing the sign of s is equivalent to changing a tachyon into its anti-particle. We have shown that it happens indeed - the sign function that regulates the sign of energy and momentum in expression (A4c) obeys the transformation rule (A17). Therefore one can always reinterpret the emitted anti-tachyon with negative energy as an absorbed tachyon with positive energy. The interchange procedure is equivalent to changing the sign of s and must be related to the charge conjugation operation C, as discussed in Sec. VI.

APPENDIX B: DERIVATION OF ALL THE PROBABILITY-LIKE RELATIVISTIC INVARIANTS

Let $\mathcal{P}^{(n)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)$ and $\mathcal{R}^{(n)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)$ be arbitrary smooth functions obeying all the conditions (19), (20), and (21). We find that the product $\mathcal{P}^{(n)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)\mathcal{R}^{(n)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)$ is also smooth and obeys the above axioms. Therefore in order to obtain a general solution obeying all the axioms, we need to find all the special solutions that are irreducible to the product of other solutions. Consider a Taylor expansion of a smooth, completely symmetric function $\mathcal{P}^{(n)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)$. From the Cauchy's theorem on symmetric many-variable polynomials [7] it follows that it can be expressed in terms of a power series of the symmetric functions $E^{(k)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)=\sum_{i=1}^{n}\phi_i^k$ in the form:

$$\mathcal{P}^{(n)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_l=1}^{\infty}\alpha^{(n)}_{k_1,k_2,\ldots,k_l} \times E^{(k_1)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)\cdots E^{(k_l)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n). \tag{B1}$$

The set of symmetric polynomials $E^{(k)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)$ for the given n and any $k\leqslant n$ is algebraically independent. It follows that the coefficients $\alpha^{(n)}_{k_1,k_2,\ldots,k_l}$ such that $k_1+k_2+\ldots+k_l\leqslant n$ are uniquely defined. We assume that the Taylor expansion of the function $\mathcal{P}^{(n)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)$ is divergent, therefore for n large enough the coefficients $\alpha^{(n)}_{k_1,k_2,\ldots,k_l}$ with $k_1+k_2+\ldots+k_l>n$ are negligible, which justifies our treatment of all the polynomials $E^{(k)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)$ as algebraically independent. In the limit of $n\to\infty$ our treatment is strict.

Let us start with finding the solution such that $\alpha^{(n)}_{k_1,k_2,\ldots,k_l}=0$ for $l\geqslant 2$. In this case the invariant (B1) reduces to:

$$\mathcal{P}^{(n)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{(n)}_k E^{(k)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n). \tag{B2}$$

Inputting this expression into the condition (21) yields:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{(n)}_k E^{(k)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)\sum_{s=0}^{\infty}\alpha^{(m)}_s E^{(s)}(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m) =\sum_{t=0}^{\infty}\alpha^{(nm)}_t E^{(t)}(\phi_1+\xi_1,\phi_1+\xi_2,\ldots,\phi_n+\xi_m). \tag{B3}$$

Using the definition of $E^{(n)}$ and Newton's formula we obtain:

$$E^{(t)}(\phi_1+\xi_1,\phi_1+\xi_2,\ldots,\phi_n+\xi_m) =\sum_{r=0}^{t}\binom{t}{r}E^{(r)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)E^{(t-r)}(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m). \tag{B4}$$

Inserting the above relation into (B3) and using mutual independence of the polynomials $E^{(k)}$ we obtain the condition for the coefficients $\alpha^{(n)}_k$:

$$k!s!\alpha^{(n)}_k\alpha^{(m)}_s=(k+s)!\alpha^{(nm)}_{k+s}, \tag{B5}$$

which is the Cauchy equation with the following solution:

$$\alpha^{(n)}_k=\frac{1}{n^{A}}\frac{\alpha^k}{k!}, \tag{B6}$$

where α and A are arbitrary constants. Putting this into the equation (B2) we obtain:

$$\mathcal{P}^{(n)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)=\frac{1}{n^{A}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}E^{(k)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n) =\frac{1}{n^{A}}\left(e^{\alpha\phi_1}+e^{\alpha\phi_2}+\ldots+e^{\alpha\phi_n}\right). \tag{B7}$$

Let us try to find out if the above special case generates all possible solutions, or there are other irreducible functions obeying the axioms (19) and (21). Consider the case of $\alpha^{(n)}_{k_1,k2,\ldots,k_l} = 0$ for $l > N$ in (B1). In this case we have:

$$\mathcal{P}^{(n)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n) = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_N=0}^{\infty} \alpha^{(n)}_{k_1,k_2,\ldots,k_N} E^{(k_1)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)\cdots E^{(k_N)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n). \tag{B8}$$

By substituting this into the axiom (21) we obtain the following condition:

$$\sum_{\sigma,\sigma'} \alpha^{(n)}_{k_{\sigma(1)},\ldots,k_{\sigma(N)}} \alpha^{(m)}_{s_{\sigma'(1)},\ldots,s_{\sigma'(N)}} = \sum_{\pi,\pi'} \binom{k_{\pi(1)}+s_{\pi'(1)}}{k_{\pi(1)}} \cdots \binom{k_{\pi(N)}+s_{\pi'(N)}}{k_{\pi(N)}} \alpha^{(nm)}_{k_{\pi(1)}+s_{\pi'(1)},\ldots,k_{\pi(N)}+s_{\pi'(N)}}, \tag{B9}$$

where σ, σ', π, and π' are arbitrary permutations of an N-element set. Without a loss of generality we can assume that the coefficients $\alpha^{(n)}_{k_1,k_2,\ldots,k_N}$ are completely symmetric functions of k_i, because any nonsymmetric component does not contribute to the overall sum (B8) anyway. This assumptions yields:

$$N!k_1!k_2!\cdots k_N!s_1!s_2!\cdots s_N!\,\alpha^{(n)}_{k_1,\ldots,k_N}\alpha^{(m)}_{s_1,\ldots,s_N} = \sum_{\pi}(k_1+s_{\pi(1)})!\cdots(k_N+s_{\pi(N)})!\,\alpha^{(nm)}_{k_1+s_{\pi(1)},\ldots,k_N+s_{\pi(N)}}, \tag{B10}$$

with the following solution:

$$\alpha^{(n)}_{k_1,k_2,\ldots,k_N} = \frac{1}{n^{A'}}\frac{\sum_\pi \alpha_1^{k_{\pi(1)}}\alpha_2^{k_{\pi(2)}}\cdots\alpha_N^{k_{\pi(N)}}}{N!k_1!k_2!\cdots k_N!}, \tag{B11}$$

where $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N$ are arbitrary constants. Let us verify what is the unknown function obeying axioms (19) and (21) by putting (B11) into the equation (B8):

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{(n)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n) &= \frac{1}{n^{A'}}\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_N=0}^{\infty}\frac{\sum_\pi \alpha_1^{k_{\pi(1)}}\alpha_2^{k_{\pi(2)}}\cdots\alpha_N^{k_{\pi(N)}}}{N!k_1!k_2!\cdots k_N!}E^{(k_1)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)\cdots E^{(k_N)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)\\ &= \frac{1}{n^{A'}}\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_N=0}^{\infty}\frac{\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\cdots\alpha_N^{k_N}}{k_1!k_2!\cdots k_N!}E^{(k_1)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)\cdots E^{(k_N)}(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)\\ &= \frac{1}{n^{A'}}\left(e^{\alpha_1\phi_1}+e^{\alpha_1\phi_2}+\ldots+e^{\alpha_1\phi_n}\right)\cdots\left(e^{\alpha_N\phi_1}+e^{\alpha_N\phi_2}+\ldots+e^{\alpha_N\phi_n}\right).\end{aligned} \tag{B12}$$

This shows that the only special case obeying the given axioms and generating the general solution of the problem is given by the expression (B7). To complete the proof we notice that the axiom (20) demands to take into account only the products of pairs of solutions (B7) with opposite signs α and $-\alpha$, as shown in the formula (22).