

Космическое решение парадокса близнецов

О. Грон и С. Брэк (Норвегия)

Перевод М.Х. Шульмана (shulman@dol.ru)

arXiv:0909.5364v1 [gr-qc] 29 Sep 2009

A cosmic solution to the twin paradox

Øyvind Grøn (Oyvind.Gron@iu.hio.no) and Simen Braeck

Oslo University College, Faculty of Engineering, P.O. Box 4 St. Olavs Plass, N-0130 Oslo, Norway

АННОТАЦИЯ

Недавно Абрамович (Abramowicz) и Байтлик (Bajtlik) [ArXiv: 0905.2428 (2009)] исследовали парадокс близнецов в пространстве-времени Шварцшильда. Рассматривая круговое движение, они показали, что близнец с исчезающим 4-ускорением окажется старше своего брата при встрече, и аргументировали, что в пространстве, которые асимптотически являются пространствами Минковского, существует некоторый абсолютный стандарт покоя, определяющий, кто из близнецов будет старше при встрече. Здесь мы показываем, что при вертикальном движении в пространстве-времени Шварцшильда дело обстоит противоположным образом: близнец с исчезающим 4-ускорением окажется моложе. Более того, привлекая сильный принцип относительности, мы также выводим существование нового релятивистского эффекта времени: согласно ему, существует расширение времени или увеличение темпа течения времени, связанного с часами, движущимися во вращающейся¹ системе отсчета. В действительности это эффект первого порядка, влияющий на скорость часов, и его следует учитывать в ситуации, представленной Абрамовичем и Байтликом, поскольку он описывается во вращающейся “покоящейся” системе отсчета применительно к одному из близнецов. Наш анализ показывает, что этот эффект имеет махианскую природу (т.е. напоминает принцип Маха), поскольку вращающееся состояние системы отсчета зависит от движения космической материи вследствие внутреннего медленного смещения, которое оно влечет.

I. ВВЕДЕНИЕ

Примерно в течение ста лет парадокс близнецов был источником вдохновения и интереса для изучающих и преподающих теорию относительности. Обычно один из близнецов (А) остается покоящимся в плоском пространстве-времени Минковского, а другой (В) отправляется в путешествие, после чего возвращается. Тогда при встрече В оказывается моложе, чем А. Однако с точки зрения В и в соответствии с принципом относительности, он (В) может считать именно себя покоящимся, а А - путешествующим. Тогда при встрече А должен оказаться моложе, чем В.

Стандартное решение парадокса состоит в том, что при встрече моложе оказывается тот из близнецов, кто во время их разлуки в большей степени испытал

¹ Здесь и далее всюду подразумевается вращение по замкнутой орбите, а не вокруг собственной оси – Примеч. пер.

ускорение [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Другими словами, ускорявшийся близнец моложе. Однако в двух очень интересных статьях Абрамович (M. A. Abramowicz) и Байтлик (S. Bajtlik) [7, 8] представили некоторые версии парадокса близнецов, где результат оказывается иным. В последней из них² они уже в заголовке утверждают, что "ускорявшийся близнец оказывается старше". Здесь А покоится в шварцшильдовом пространстве вне невращающейся звезды, а В движется по круговой орбите. Краткий расчет показывает, что А стареет сильнее, чем В, после движения В по круговой орбите. Близнец В движется свободно и обладает исчезающим 4-ускорением, в то время как на А действует сила, сохраняющая его в состоянии покоя, следовательно, он обладает неисчезающим 4-ускорением. Это является основанием для их утверждения в заголовке статьи.

Следует, однако, заметить, что А не испытывает 3-ускорения, в то время как В испытывает неисчезающее центростремительное ускорение. Следовательно, как и в пространстве-времени Минковского, близнец с исчезающим 3-ускорением окажется старше. В общем случае 3-ускорение и 4-ускорение имеют разный физический смысл и различные свойства. Трехмерное ускорение является относительным и может быть преобразовано путем перехода к сопутствующей "покоящейся" системе отсчета объекта. Четырехмерное ускорение объекта является абсолютным и не может быть преобразовано. Оно вызвано негравитационными силами и исчезает только для свободно падающего объекта.

В "стандартном решении" парадокса близнецов, описанного выше, описание близнецов дано со ссылкой на инерциальную систему отсчета в пространстве-времени Минковского, и под "ускорением" обычно подразумевается 3-ускорение. Однако в данном случае различия между 3-ускорением и 4-ускорением не делается.

Для близнецов в плоском пространстве-времени инвариантное утверждение должно звучать так: близнец с неисчезающим 4-ускорением оказывается моложе. Именно для этого утверждения Абрамович и Байтлик показали, что в общем случае оно не справедливо. Они сформулировали несколько предположений о том, что же должно на самом деле быть истинным. В этой связи они ввели "абсолютный стандарт покоя" в шварцшильдовом пространстве-времени, указывая:

"Абсолютный стандарт покоя в шварцшильдовом пространстве-времени задается локальной симметрией Киллинга, $\partial t = 0$, ненулевой кривизной, и глобальным условием асимптотической плоскостности (применительно к звездному небу)".

Для вышеупомянутой ситуации они вывели связь между временами "старения" А и В

$$\frac{\tau_A}{\tau_B} = \sqrt{\frac{1 - v_A^2}{1 - v_B^2}} \quad (1)$$

при $v_A = 0$. Далее они пишут: эта формула

"показывает, что отношение собственных времен, измеренных между двумя их последовательными встречами, зависит только от их орбитальных скоростей v_A и v_B , измеренных в соответствии с абсолютным глобальным стандартом покоя."

² См. русский перевод по ссылке www.timeorigin21.narod.ru/rus_translation/Twin_paradox_news.pdf - Примеч. пер.

Рассматривая различные ситуации, они заключают:

"Во всех ситуациях, в которых абсолютное движение может быть определено в терминах некоторых глобальных свойств пространства-времени, близнец, который движется быстрее в соответствии с глобальным стандартом покоя, при встрече оказывается моложе, безотносительно к ускорениям близнецов"

Далее они задают вопрос:

"Может ли утверждение "движущийся быстрее близнец оказывается моложе при встрече" быть каким-либо образом распространено на классическую версию парадокса в пространстве-времени Минковского, например, относительно звездного неба над близнецами?".

Авторы оставляют этот вопрос без ответа. В настоящей статье мы попытаемся дать на поставленный ими вопрос общий ответ. На пути к этому мы рассматриваем некоторые версии парадокса близнецов в гравитационном поле, сначала в равномерно ускоренной системе отсчета в плоском пространстве-времени, затем в модели Вселенной с метрикой Фридмана-Робертсона Уокера (FRW-метрике) и, наконец, исследуем ситуацию с двумя близнецами в пространствах Шварцшильда и Керра.

Мы подчеркиваем значение идеального инерциального смещение [9] для определения космических инерциальных систем, и формулируем предположение, которое является первым шагом к получению ответа на вопрос, поставленный Абрамовичем и Байтликом. Однако новая версия парадокса близнецов, в которой одни часы брошены вертикально вверх в пространстве Шварцшильда, а затем снова падают к часам, оставшимся в покое, показывает, что наше предположение не может дать окончательного ответа на вопрос Абрамовича и Байтлика. Наш окончательный ответ таков: утверждение "движавшийся близнец окажется моложе при встрече" может быть распространено на классическую версию парадокса близнецов в пространстве Минковского, как описывается в инерциальной (не вращающейся) системе отсчета. Но в общем случае это неверно. Темп старения близнеца зависит от трех эффектов: замедления времени в зависимости от скорости, гравитационного замедления времени и космических факторов. Если два близнеца сравнивают свой возраст в моменты событий P_1 и P_2 , то близнец, который "в среднем" двигался более медленно относительно космической материи и находился выше в поле тяготения, постареет сильнее к моменту второго события P_2 .

II. ПАРАДОКС БЛИЗНЕЦОВ В РАВНОМЕРНО УСКОРЕННОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Пусть равномерно ускоренная система отсчета имеет координаты (t, x, y, z) . Мы рассматриваем двух близнецов А и В. Близнец А остается в покое в этой равномерно ускоренной системе отсчета и имеет постоянное ускорение покоя g . Путешествующий близнец В стартует из начала координат $x = 0$ с начальной координатной 3-скоростью $v_0 = (dx/dt)_{t=0}$ в положительном направлении по оси x и движется вдоль этой оси. Таким образом, согласно мнению близнеца А, близнец В движется вперед и одновременно с этим падает в равномерном гравитационном поле.

В равномерно ускоренной системе отсчета линейный элемент дается выражением

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{gx}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2)$$

и лагранжиан для В может быть представлен в виде

$$L = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{gx}{c^2}\right)^2 c^2 \dot{t}^2 + \frac{1}{2} \dot{x}^2, \quad (3)$$

где точки обозначают производные по собственному времени τ близнеца В. Поскольку лагранжиан не зависит от t , то импульс, сопряженный с координатным временем,

$$p_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = - \left(1 + \frac{gx}{c^2}\right)^2 c^2 \dot{t} \quad (4)$$

является интегралом движения. С использованием уравнения (4) тождество для 4-скорости $\vec{u} \cdot \vec{u} = -c^2$ дает

$$p_t^2 - \left(1 + \frac{gx}{c^2}\right)^2 c^2 = \left(1 + \frac{gx}{c^2}\right)^2 \dot{x}^2. \quad (5)$$

Теперь p_t может быть определен, если заметить, что в момент, когда близнец В обращается вокруг и находится в высшей точке $x = h$ своего пути, $\dot{x} = 0$, и уравнение (5) тогда дает

$$p_t = - \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right) c. \quad (6)$$

Подставляя выражение (6) для p_t в уравнение (5) и замечая, что время движения вниз то же самое, что и время движения вверх, интервал собственного времени близнеца В в течение его путешествия равен

$$\tau = 2 \int_0^h \frac{1 + \frac{gx}{c^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{gh}{c^2}\right)^2 c^2 - \left(1 + \frac{gx}{c^2}\right)^2 c^2}} dx. \quad (7)$$

Интегрирование дает

$$\tau = \frac{2c}{g} \sqrt{\left(1 + \frac{gh}{c^2}\right)^2 - 1}. \quad (8)$$

Чтобы вычислить соответствующий интервал времени, измеряемый по часам близнеца А, мы используем совместно уравнения (4) и (6) и получаем

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1 + \frac{gh}{c^2}}{\left(1 + \frac{gx}{c^2}\right)^2}. \quad (9)$$

Используя соотношение $dt/d\tau = (dt/dx)(dx/d\tau)$ и подставляя вместо $dx/d\tau$ соответствующее соотношение из (7), находим

$$t = 2 \int_0^h \frac{1 + \frac{gh}{c^2}}{\left(1 + \frac{gx}{c^2}\right) \sqrt{\left(1 + \frac{gh}{c^2}\right)^2 c^2 - \left(1 + \frac{gx}{c^2}\right)^2 c^2}} dx. \quad (10)$$

Вычислив этот интеграл, мы получаем

$$t = \frac{2c}{g} \ln \left(1 + \frac{gh}{c^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{gh}{c^2}\right)^2 - 1} \right). \quad (11)$$

Из уравнений (8) и (11) следует, что

$$\frac{gt}{2c} = \ln \left(\frac{g\tau}{2c} + \sqrt{1 + \left(\frac{g\tau}{2c}\right)^2} \right) = \operatorname{arcsinh} \left(\frac{g\tau}{2c} \right). \quad (12)$$

Это соотношение может быть переписано в виде

$$\frac{g\tau}{2c} = \sinh \left(\frac{gt}{2c} \right). \quad (13)$$

Поскольку $\sinh(gt/2c) > gt/2c$, то $\tau > t$. Иными словами, путешествующий близнец (В) при встрече оказывается старше, чем покоящийся близнец (А).

Ситуация, описанная здесь, подобна той, которую обсуждали Абрамович и Байтлик. Покоящийся близнец А стареет на время t , испытывает исчезающее координатное 3-ускорение, но не находится в состоянии свободного падения и, следовательно, обладает неисчезающим 4-ускорением. С другой стороны, близнец В путешествует и стареет на время τ , испытывает неисчезающее координатное 3-ускорение, но свободно падает и, следовательно, обладает исчезающим 4-ускорением. Кроме того, в этом случае близнец (В), обладающий неисчезающим координатным 3-ускорением, исчезающим 4-ускорением, и движущийся быстрее, оказывается старше при встрече, вопреки тому, что было установлено в примере, представленном Абрамовичем и Байтликом. Мы заключаем, следовательно, что 4-ускорение, координатное 3-ускорение и координатная скорость не могут быть решающими факторами при определении того, какой именно близнец окажется старше.

III. ПАРАДОКС БЛИЗНЕЦОВ В МОДЕЛЯХ ВСЕЛЕННОЙ ФРИДМАНА-РОБЕРТСОНА-УОКЕРА

Теперь рассмотрим вертикальное движение в расширяющейся однородной и изотропной модели Вселенной. Пусть космическая система отсчета определена

множеством свободно движущихся частиц, имеющих сопутствующие координаты (t, r, θ, ϕ) . Тогда геометрия пространства-времени такой Вселенной описывается линейным элементом (см., например, [6]):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (14)$$

где $a(t)$ – так называемый масштабный фактор. Теперь предположим, что близнец А остается в покое в точке с координатой $r = 0$, в то время как близнец В осуществляет вертикальное движение вдоль r -направления. В момент $t = 0$ близнец В отправляется из положения $r = 0$ с координатной скоростью $v_0 = (dr/dt)_{t=0}$ в положительном r -направлении и движется с отрицательным ускорением $-g(t)$ при $t > 0$. Координатная скорость близнеца В в произвольный момент времени обозначена через $v(t)$.

Время путешествия t_1 , измеренное по часам близнеца А при встрече, определяется из условия $r(t) = 0$. Соответствующий интервал времени, измеренный по часам близнеца В, может быть получен из уравнения (14), что дает

$$\tau = \int_0^{t_1} \sqrt{1 - \frac{a^2(t) v^2}{(1 - kr^2) c^2}} dt. \quad (15)$$

Поскольку подынтегральное выражение меньше единицы в любой момент времени, мы видим, что $\tau < t_1$. Таким образом, близнец В, который движется с неисчезающим 3-ускорением, неисчезающим 4-ускорением и с большей скоростью, оказывается моложе при встрече. Соответственно, парадокс близнецов в расширяющейся Вселенной имеет решение, аналогичное классическому парадоксу близнецов в пространстве-времени Минковского. Однако заметим, что в то время как пространство-время Минковского является плоским, пространство-время в модели Вселенной с FRW-метрикой искривлено. Таким образом, при определении того, какой из близнецов будет старше, влияние кривизны пространства, по-видимому, не кажется существенным.

IV. ПАРАДОКС БЛИЗНЕЦОВ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ ШВАРЦШИЛЬДА

В шварцшильдовых координатах (t, r, θ, ϕ) геометрия Шварцшильда описывается линейным элементом вида

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) (cdt)^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (16)$$

где R_S обозначает радиус Шварцшильда. Мы теперь предположим, что близнец А остается в состоянии покоя при фиксированном значении радиуса $r = R$, в то время как близнец В путешествует. Близнец В стартует из того же положения $r = R$ с начальной координатной 3-скоростью $v_0 = (dr/dt)_{t=0}$ в положительном r -

направлении и продолжает свободно двигаться в радиальном направлении. Тогда лагранжиан будет равен

$$L = -\frac{c^2}{2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{R_s}{r}}, \quad (17)$$

и постоянный импульс, сопряженный к координатному времени, составит

$$p_t = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \dot{t} c. \quad (18)$$

Тождество для четырехмерной скорости теперь дает

$$p_t^2 - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 = \dot{r}^2. \quad (19)$$

p_t можно определить, заметив, что когда близнец В находится в высшей точке $r = R + h$, $\dot{r} = 0$ и, следовательно,

$$p_t = -\sqrt{1 - \frac{R_s}{R+h}} c. \quad (20)$$

Собственное время путешествия близнеца В при встрече теперь может быть найдена подстановкой выражения для p_t в уравнение (19):

$$\tau = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{R+h}{R_s}} \int_R^{R+h} \sqrt{\frac{r}{R+h-r}} dr. \quad (21)$$

Здесь множитель 2 учитывает направления путешествия как вперед, так и назад во времени. Тогда интегрирование дает

$$\tau = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{R+h}{R_s}} \left(\sqrt{Rh} + (R+h) \arccos \sqrt{\frac{R}{R+h}} \right). \quad (22)$$

Чтобы вычислить соответствующий временной интервал t_R , который покажут часы близнеца А, мы рассмотрим совместно уравнения (18) и (20), что дает

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\sqrt{1 - \frac{R_s}{R+h}}}{1 - \frac{R_s}{r}}. \quad (23)$$

Из уравнений (23), (21) и соотношения $dt/d\tau = (dt/dr)(dr/d\tau)$ следует, что

$$\frac{dt}{dr} = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{R+h}{R_s}} - 1 \frac{r^{3/2}}{(r - R_s) \sqrt{R+h-r}}. \quad (24)$$

Однако координатное время t представляет собой интервал времени, который измерил бы наблюдатель в состоянии покоя, бесконечно удаленный от центральной массы. Из выражения для линейного элемента видно, что соотношение между координатным временем и временным интервалом, измеренным по часам близнеца А, который находится в состоянии покоя в положении $r = R$, дает $dt_R = \sqrt{1 - R_S/R} dt$. Подставляя это соотношение в уравнение (24), мы получаем:

$$t_R = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{(R - R_S)(R + h - R_S)}{RR_S}} \times \int_R^{R+h} \frac{r^{3/2}}{(r - R_S) \sqrt{R + h - r}} dr. \quad (25)$$

Для интересующей нас здесь ситуации $r > R_S$ и с учетом интеграла в (25) находим:

$$\begin{aligned} t_R = & \frac{2}{c} \sqrt{\frac{h(R - R_S)(R + h - R_S)}{RR_S}} \\ & + \frac{4R_S + 2R + 2h}{c} \times \\ & \sqrt{\frac{(R - R_S)(R + h - R_S)}{RR_S}} \operatorname{arccot} \sqrt{\frac{R}{h}} \\ & + \frac{4R_S}{c} \sqrt{\frac{R - R_S}{R}} \operatorname{arcoth} \sqrt{\frac{R(R + h - R_S)}{R_S h}}. \end{aligned} \quad (26)$$

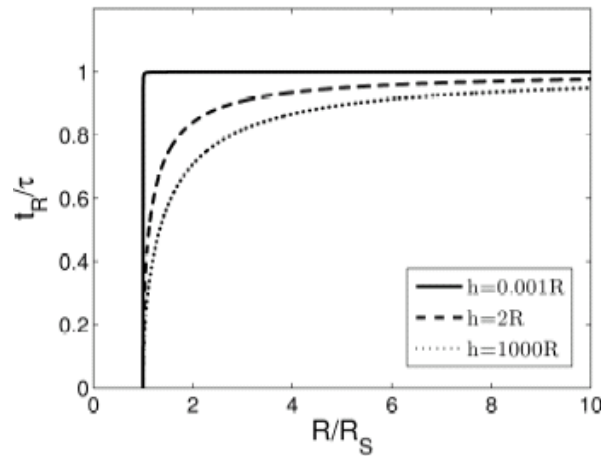


РИСУНОК 1: Отношение длительностей (t_R/τ) между встречами, измеренных по часам близнецов А и В, при различных начальных положениях R в пространстве-времени Шварцшильда. Три кривые вычислены при различном выборе высоты h .

Теперь можно сравнить длительности путешествия, измеренные по часам близнеца А (t_R) и близнеца В (τ) соответственно. На рис. 1 показано отношение t_R/τ в функции R/R_S для трех конкретных значений высоты h . Как можно видеть, к концу путешествия часы близнеца В измеряют более длительный интервал, чем часы

близнеца А, т.е. $\tau > t_R$. Иными словами, близнец А, который находится в стационарном состоянии и обладает исчезающим 3-ускорением и неисчезающим 4-ускорением и движется медленнее, теперь оказывается моложе при встрече, в согласии с результатом, полученным в разделе II. Интересно, что эти вычисления, таким образом, показывают: вертикальное движение в пространстве-времени Шварцшильда дает результат, в точности противоположный случаю кругового движения, рассмотренного Абрамовичем и Байтликом. Утверждения, введенные ими - "глобальный стандарт покоя" и "близнец, который движется быстрее по отношению к глобальному стандарту покоя, окажется моложе при встрече", представляются, следовательно, противоречащими нашему результату, описывающему вертикальное движение в пространстве-времени Шварцшильда.

V. ВЛИЯНИЕ КОСМИЧЕСКОГО ВРЕМЕНИ

В этом разделе мы рассмотрим парадокс близнецов в пространстве-времени Шварцшильда, который описывается во вращающейся [по орбите] системе отсчета, сопутствующей круговому движению близнеца в соответствии с разделом I.

Согласно сильному принципу относительности [9], некоторый наблюдатель, движущийся каким-либо образом, может рассматриваться как покоящийся. Однако, когда используются ускоренные или вращающиеся системы отсчета, необходимо включить в наше рассмотрение удаленные массы [10]. Чтобы развить нашу точку зрения на проблему кругового движения в пространстве-времени Шварцшильда, обсуждаемого в разделе I, мы теперь рассмотрим ситуацию с точки зрения вращающейся системы отсчета, в которой "путешествующие" часы (т.е. часы близнеца В) находятся в состоянии покоя. Набор координат (t', r', θ', ϕ') , сопутствующих вращающейся системе отсчета, задается преобразованием

$$t' = t, \quad r' = r, \quad \theta' = \theta, \quad \phi' = \phi - \omega t. \quad (27)$$

Здесь $\omega > 0$ представляет угловую скорость системы отсчета относительно космической материи (см. раздел VII). Для простоты мы предполагаем, что два близнеца осуществляют орбитальное движение с постоянным радиусом $r' = r_c$ в экваториальной плоскости, для которой $\theta' = \pi/2$. Тогда, подставляя ненулевые дифференциалы dt' и $d\phi'$ в уравнение (16), мы можем представить линейный элемент во вращающейся системе отсчета в виде

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r_c} - \frac{r_c^2 \omega^2}{c^2} \right) c^2 dt'^2 + r_c^2 d\phi'^2 + 2r_c^2 \omega d\phi' dt'. \quad (28)$$

Чтобы вычислить интервалы времени, показываемые часами близнецов при встрече, мы сначала перепишем вышеприведенный линейный элемент в следующем виде:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r_c} - \frac{r_c^2 \omega^2}{c^2} - \frac{r_c^2}{c^2} \Omega^2 - \frac{2r_c^2 \omega}{c^2} \Omega \right) c^2 dt'^2, \quad (29)$$

где $\Omega = d\phi'/dt'$ - угловая скорость объекта во вращающейся системе отсчета, в которой близнец В остается покоящимся. Из уравнения (29) видно, что этот

собственный интервал времени, измеренный по часам близнеца В в момент встречи, оказывается равным

$$\tau_B = \left(1 - \frac{R_S}{r_c} - \frac{r_c^2 \omega^2}{c^2} \right)^{1/2} \Delta t', \quad (30)$$

где $\Delta t'$ - координатное время, прошедшее между расставанием и встречей близнецов. Последние два члена в скобках в уравнении (30) представляют собой хорошо известные эффекты гравитационного замедления времени, т.е. эффекты замедления времени, обусловленные различием в высоте. Член R_S/r_c представляет время гравитационного замедления статического наблюдателя вне сферы действия гравитирующего тела. С другой стороны, член $r_c^2 \omega^2 / c^2$ представляет замедление времени, обусловленное гравитационным полем, которое воздействует на покоящегося наблюдателя во вращающейся системе отсчета.

Однако теперь близнец А движется по круговой орбите во вращающейся системе отсчета. Следовательно, соответствующий интервал собственного времени, измеренный по часам близнеца А, будет равен

$$\tau_A = \left(1 - \frac{R_S}{r_c} - \frac{r_c^2 \omega^2}{c^2} + \frac{r_c^2}{c^2} f(\Omega) \right)^{1/2} \Delta t', \quad (31)$$

где для удобства мы ввели функцию

$$f(\Omega) = -\Omega^2 - 2\omega\Omega. \quad (32)$$

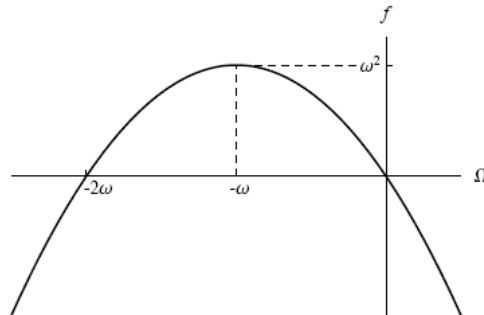


РИСУНОК 2: График функции $f(\Omega)$, введенной в уравнении (32) для различных координатных скоростей.

Изображение $f(\Omega)$ приведено на рис. 2. Из сравнения уравнений (30) и (31) ясно, что τ_B и τ_A отличаются только двумя членами, определяемыми функцией $f(\Omega)$. Физическая интерпретация этих двух членов такова. Член $r_c^2 \Omega^2 / c^2$ просто отвечает хорошо известному релятивистскому эффекту: это обычное кинематическое замедление времени, обусловленное относительными координатными скоростями. Этот член присутствует для движущегося наблюдателя, т.е. когда $|\Omega| > 0$, независимо от вращения системы отсчета. Однако член $-2r_c^2 \omega \Omega / c^2$ отвечает новому типу замедления времени и имеет иной характер, связанный с только с движением часов во вращающейся системе отсчета, для которой $|\omega| > 0$. Этот эффект подобен

эффекту кориолисова ускорения, поскольку оно пропорционально произведению угловой скорости относительно космической материи (ω) на угловую координатную скорость (Ω). Его вклад дает уменьшение темпа времени, если угловая скорость частицы во вращающейся системе отсчета имеет то же направление, что и угловая скорость системы отсчета относительно звезд. Если же две эти угловые скорости имеют противоположные направления, то этот член дает увеличение темпа времени. Этот новый временной эффект мы далее будем называть *эффектом космического времени*.

При выполнении условия $-2\omega < \Omega < 0$ видно, что $f(\Omega)$ дает положительный вклад τ_A , так что $\tau_A > \tau_B$. В частности, отметим, что если близнец А находится в состоянии покоя относительно космической материи, т.е. $\Omega = -\omega$, то τ_A обладает максимальным значением $1 - R_S/r_c$. С другой стороны, при $\Omega < -2\omega$ или $\Omega > 0$ величина $f(\Omega)$ становится отрицательной. Тогда угловая скорость близнеца А относительно космической материи будет больше, чем угловая скорость близнеца В, и в этом случае $\tau_B > \tau_A$. Таким образом, часы близнеца А идут тем быстрее, чем меньше угловая скорость, которой он обладает относительно космической материи.

Ограничив наше внимание случаем $-2\omega < \Omega < 0$, подчеркнем следующее наблюдение: даже если близнец В осуществляет геодезическое движение, оставаясь в покое во вращающейся системе отсчета, в то время как близнец А движется по круговой орбите того же радиуса под влиянием сил, близнец А стареет быстрее, чем близнец В. Иными словами, движущийся близнец (А), обладающий ненулевой координатной скоростью и, следовательно, испытывающий кинематическое замедление времени, тем не менее, стареет быстрее, чем покоящийся близнец (В). Причина этого специального результата состоит в том, что движущийся близнец также испытывает эффект космического времени, который уравнивает кинематическое замедление времени. Таким образом, мы находим, что близнец А, обладающий неисчезающим 4-ускорением, оказывается в этом случае старше, чем его неускоренный брат. Это согласуется с результатами, полученными Абрамовичем и Байтликом.

Наконец, мы подчеркиваем, что уравнения (30) и (31) остаются справедливыми даже в отсутствие звезд по соседству, т.е. в пределе $R_S \rightarrow 0$, отвечающим плоскому пространству-времени. Во вращающейся системе отсчета близнец А тогда движется по круговой орбите вокруг центральной оси в локально пустом пространстве. Для частной ситуации при $\Omega = -\omega$ близнец А остается в покое относительно космической материи. Тогда близнец А обладает исчезающим 4-ускорением, в противоположность ситуации, когда звезда присутствует.

Чтобы объяснить тот конкретный факт, что при круговом движении в пространстве-времени Шварцшильда часы стационарного близнеца стареют быстрее независимо от 4-ускорений близнецов, Абрамович и Байтлик предположили, что именно близнец, движущийся быстрее относительно глобального стандартного покоя при встрече окажется моложе. Кроме того, для нашей Вселенной представляется базовым наблюдательным фактом то, что каждая точка в пространстве-времени, все локальные системы отсчета эквивалентны с точки зрения проведения всех физических экспериментов. Из этого следует, что понятие скорости описывает относительное движение, но не движение по отношению к абсолютному стандарту покоя. Это побуждает нас предложить альтернативное описание предыдущих результатов, что более подробно обсуждается в следующих разделах.

VI. СТАРЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ КЕРРА

В качестве последнего примера рассмотрим круговое движение в осесимметричном стационарном пространстве, которое является асимптотически пространством Минковского вдали от $r = 0$. Тогда можно записать линейный элемент вдоль кругового пути

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2. \quad (33)$$

Следовательно, собственное время τ близнеца с координатной угловой скоростью $\Omega = d\phi/dt$ дается выражением

$$d\tau = (-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2)^{1/2} dt, \quad (34)$$

где t – координатное время, которое везде равно собственному времени, измеряемому покоящимися часами в асимптотической метрике Минковского.

Наблюдатель с нулевым угловым моментом (zero angular momentum observer - ZAMO) обладает координатной угловой скоростью [11]

$$\Omega_Z = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}. \quad (35)$$

Следовательно, собственное время ZAMO равно

$$d\tau = (-g_{tt} + g_{\phi\phi}\Omega^2)^{1/2} dt. \quad (36)$$

Найдем угловую скорость движущегося по круговой орбите того близнеца, который стареет с максимальной быстротой. Наивная точка зрения состоит в том, что это – покоящийся близнец, поскольку зависящее от скорости замедление времени стремится замедлить старение. Полагая производную функции

$$F(\Omega) = -g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2 \quad (37)$$

равной нулю, мы, однако, находим, что ZAMO стареет наиболее быстро. Это согласуется с результатом Абрамовича и Байтлика [8].

Для метрики Керра в координатах Бойера-Линдквиста угловая скорость ZAMO исчезает в асимптотике области Минковского и растет с уменьшением радиуса. Это является выражением инерциального смещения, обусловленного центральной массой в пространстве-времени Керра.

VII. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ МИНКОВСКОГО И ПРИНЦИП МАХА

В предшествующем разделе вращательное движение было описано как имеющее абсолютный характер. Мы говорили об асимптотическом пространстве-времени Минковского, в котором ZAMO имеет нулевую угловую скорость. Более того, в пространстве-времени Минковского инерциальные системы отсчета не являются вращающимися; их система отсчета есть система отсчета ZAMO.

Но в глобальном пустом пространстве-времени Минковского нет ответа на следующий вопрос: что определяет состояние вращения инерциальных систем отсчета? Мы поэтому предполагаем, что глобально пустое пространство-время Минковского, равно как и асимптотическое пространство-время Минковского вдали от локально распределенных масс, являются неудовлетворительными моделями пространства-времени.

В качестве дальнейшей мотивации для более полной модели пространства-времени Минковского отметим такой хорошо установленный экспериментальный факт: оси вращения гироскопа прецессируют с угловой скоростью ZAMO. В асимптотической области Минковского это означает, что они не прецессируют по отношению к удаленным массам. Это предполагает, что вращение следует рассматривать как описание движения относительно среднего движения всей материи во Вселенной. Более того, поскольку плотность стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ в FRW-модели Вселенной, доминированной излучением и пылью, пространство-время в такой Вселенной стремится к пространству-времени Минковского [12]. Это может быть проверено путем вычисления скаляра кривизны Кречмана (Kretschmann's curvature scalar) [6] для FRW-метрики, заданной уравнением (14). В пределе при $a(t) \rightarrow \infty$ скаляр кривизны Кречмана стремится к нулю, а это показывает, что FRW пространство-время переходит в плоское пространство-время. Следовательно, инерциальные системы отсчета даже в этом асимптотическом пространстве-времени Минковского не вращаются относительно среднего движения всей материи во Вселенной.

Справедливость такой “махианской” (т.е. в духе принципа Маха) интерпретации в нашей Вселенной недавно продемонстрировал С. Schmid [13, 14]. Введя вращательное возмущение, он показал, что идеальное смещение является свойством нашей Вселенной, т.е. что угловая скорость ZAMO при вращательном возмущении FRW-Вселенной равна средней угловой скорости космического распределения масс (угловой скорости вращательного возмущения).

Согласно такой точке зрения на вращательное движение, можно сделать некоторое неявное допущение, когда асимптотическое пространство-время Минковского вводится в решения уравнений Эйнштейна для геометрии вне локализованного распределения масс, а именно, что наблюдатели, относящиеся к классу ZAMO, не вращаются по отношению к космическим массам в этой области. Следовательно, речь идет о взаимодействиях между всеми массами во Вселенной, включая соседние вращающиеся звезды и планеты, которые определяют локальных наблюдателей класса ZAMO.

С операционной точки зрения локальная система отсчета специального класса, для которой сопутствующие наблюдатели принадлежат к классу ZAMO, может быть определена через частицу с нулевой угловой скоростью по отношению к среднему движению космических масс, свободно падающую из области, удаленной от локализованной массы.

Представленный анализ предполагает, что пространство-время Минковского не должно мыслиться глобально пустым. Мы предлагаем обобщенную модель пространства Минковского, т.е. глобально плоского пространства-времени или плоской области асимптотически плоского пространства-времени, где пространство дополнено удаленной космической оболочкой с радиусом, равным его (пространства) радиусу Шварцшильда, представляющей космическую массу. Внутри такой оболочки можно говорить о плоском пространстве-времени и идеальном перемещении

(dragging) [15, 16]. Вблизи оболочки объекты класса ZAMO не обладают вращательным движением относительно оболочки. Но в далеких от оболочки внутренних областях объекты класса ZAMO в общем случае будут вращаться вследствие вращения локального распределения масс.

Такая модель пространства-времени Минковского имеет махианский характер. В рамках этой модели общий принцип относительности может быть справедливым для вращательного движения. Эта модель также является релевантной с точки зрения, которую высказал недавно Christian Møller [10]. Он писал, что при решении уравнений поля Эйнштейна во вращающейся системе отсчета необходимо учитывать удаленные космические массы. Раньше для глобальных или асимптотических пространств Минковского делалось исключение, поскольку там не было удаленных масс. В расширенной же модели пространства-времени Минковского следует работать так же, как и в любом другом пространстве-времени. Кроме того, расширенная модель пространства-времени Минковского требует, чтобы решение как в случае классической версии парадокса близнецов в пространстве-времени Минковского, так и в присутствии распределения локализованных масс учитывало космическую связь.

VIII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наши примеры показывают, что кривизна пространства времени или какой-либо абсолютный стандарт покоя не является решающим фактором при определении того, кто из двух близнецов, разлучающихся и снова встречающихся, окажется старше при встрече. Вследствие Лоренц-инвариантности физических явлений не существует какого-либо абсолютного стандарта покоя. Однако во Вселенной с идеальным смещением инерциальных систем отсчета существует стандарт движения без ускорения и без вращения. Тем не менее, этот стандарт определен относительно усредненного движения космической материи. Кроме того, он справедлив лишь асимптотически вдали от распределения космических масс. В таких удаленных областях инерциальные системы отсчета представляют собой свободно движущиеся ZAMO-системы отсчета с постоянным модулем скорости.

В своем примере для метрики Шварцшильда Абрамович и Байтлик сформулировали интересный и кажущийся парадоксальным предел:

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow 0} & \quad (\text{близнец, который движется быстрее, оказывается} \\ & \quad \text{моложе, ускорение не важно}) \\ = & \quad (\text{близнец, движется ускоренно, оказывается моложе,} \\ & \quad \text{скорость не важна}) \end{aligned} \quad (38)$$

Этот предел был сформулирован в контексте кругового движения, следовательно, в нем пренебрегается вертикальным движением в поле тяготения. Такое пренебрежение может быть понято в свете расширенной модели пространства-времени Минковского. Асимптотическая плоскостность пространства-времени Шварцшильда или, для данного случая, пространства-времени Керра означает, что в случае кругового движения тот близнец, который движется медленнее относительно локального ZAMO-поля, стареет быстрее. Следовательно, предел (38) должен быть заменен на следующий:

$$\begin{aligned}
& \lim_{M \rightarrow 0} \quad (\text{близнец, который движется быстрее относительно} \\
& \quad \text{локального ZAMO-поля, оказывается моложе}) \\
& = \quad (\text{близнец, который движется быстрее относительно} \\
& \quad \text{космической материи, оказывается моложе}) \quad (39)
\end{aligned}$$

Однако учет вертикального движения в поле тяготения показывает, что ни один из этих пределов в общем случае не справедлив. Наши примеры указывают, что нет простого ответа на вопрос "какой из близнецов окажется старше при встрече?". Мы показали, что для получения общего ответа на этот вопрос необходимо учитывать влияние на течение времени как кинематического фактора, так и фактора поля тяготения, а также и третий фактор, который ранее не учитывался: влияние космического времени, которое проявляется лишь для часов, движущихся во вращающейся системе отсчета, т.е. когда соответствующий член не исчезает в уравнении (31).

Наше решение парадокса близнецов имеет махианский характер (напоминает принцип Маха). Нет абсолютного стандарта покоя, потому что даже идеальное смещение не фиксирует скорость инерциальных систем отсчета. Иными словами, идеальное инерциальное смещение не нарушает Лоренц-инвариантности инерциальных систем отсчета. Оно, однако, фиксирует угловую скорость ZAMO-поля в асимптотической области Минковского ограниченного распределения масс. Далее, ZAMO-поле определяет, который из близнецов окажется моложе при встрече в случае кругового движения. Это будет близнец, который вращается быстрее относительно наблюдателей класса ZAMO. В общем случае такой близнец не движется свободно. В пределе, когда момент вращения вращающегося тела исчезает, угловая скорость близнеца, который тоже относится к классу, также исчезает, и близнец будет оставаться в покое. Если тело является сферическим, то этот предел представляет случай Шварцшильда, когда покоящийся близнец стареет быстрее, чем движущийся свободно по круговой орбите. Однако, как было показано выше, свободно движущийся близнец, который сначала поднимается, а потом снова падает, стареет быстрее, чем даже покоящийся близнец.

Следовательно, свободное движение не является решающим для быстрого старения. Важно иметь достаточную высоту в поле тяготения. Перемещая близнеца на большую высоту, заставим его оставаться там в течение длительного времени, а затем дадим ему вернуться вниз к его брату. Тогда он окажется старше этого брата. Часы на GPS-спутнике, например, "стареют" быстрее, чем часы, покоящиеся на поверхности Земли, хотя спутники быстро движутся в системе отсчета, покоящейся относительно Земли.

Когда парадокс близнецов описывается во вращающейся [по орбите] покоящейся системе отсчета близнеца, необходимо учитывать новый временной эффект, связанный с угловой скоростью другого близнеца в этой системе отсчета. Физика этого явления состоит в том, что новый эффект гарантирует, как анализировалось в любой системе отсчета, что близнец, покоящийся относительно ZAMO-поля, постареет быстрее. Следовательно, здесь имеется космическая связь, поскольку асимптотическое ZAMO-поле определяется космической материей и энергией.

По этой причине мы и говорили в заголовке о космическом решении парадокса близнецов. Кто из близнецов окажется моложе при встрече, определяется совокупностью кинематического, гравитационного и космических факторов. Кривизна не является решающим фактором. Так же, как и какой-либо космический стандарт покоя. Его просто не существует. Как было показано выше, круговое и вертикальное движение в пространстве-времени Шварцшильда дают противоположные результаты. При круговом движении близнец А, который покоится относительно звезды, будет старше, но при вертикальном движении оставшийся на месте близнец будет моложе. С точки зрения близнеца А различие обусловлено тем фактом, что замедление времени вследствие действия гравитационного поля не имеет значения при круговом движении, но доминирует при вертикальном движении. С точки зрения близнеца В, движущегося по круговой орбите, ситуация странная. В наблюдает, что А движется вдоль круговой орбиты на той же самой высоте, что и он сам. Нет гравитационного эффекта замедления времени, только кинематический эффект, который заведомо должен сделать А моложе, чем он сам. Кроме того, он обнаруживает при встрече, что А старше, чем он. Чтобы объяснить это, он привлекает релятивистский временной эффект, который мы назвали влиянием космического времени. Это говорит о том, что космическая масса действует на темп времени часов во вращающейся [по орбите] системе отсчета таким образом, что старение происходит тем быстрее, чем меньше угловая скорость относительно космической материи.

Поскольку, однако, фактор космического замедления времени действует совместно с кинематическим и гравитационным факторами, быстрее всего время отсчитывается в общем случае ни инерциальным наблюдателем, ни движущимся с наименьшей скоростью или находящимся на максимальной высоте в поле тяготения. Значение имеет суммарное действие всех этих факторов. Чтобы стареть медленно, желательно двигаться как можно скорее относительно локального ZAMO-поля и находиться как можно ниже в поле тяготения.

- [1] L. Marder, *Time and the Space-Traveller* (George Allen & Unwin, London, 1971).
- [2] E. Eriksen and Ø. Grøn, "Relativistic dynamics in uniformly accelerated reference frames with application to the clock paradox", *Eur. J. Phys.* **11**, 39-44 (1990).
- [3] T. A. Debs and M. G. L. Redhead, "The twin 'paradox' and the conventionality of simultaneity", *Am. J. Phys.* **64**, 384-392 (1995).
- [4] H. Nicolíć, "The role of acceleration and locality in the twin paradox", *Found. Phys. Lett.* **13**, 595-601 (2000).
- [5] L. Iorio, "An analytical treatment of the Clock Paradox in the framework of the special and general theories of relativity", *Found. Phys. Lett.* **18**, 1-19 (2006).
- [6] Ø. Grøn and S. Hervik, *Einstein's General Theory of Relativity*. (Springer, New York, 2007).
- [7] M. A. Abramowicz, S. Bajtlik and W. Kluźniak, "The twin paradox on the photon sphere", *Phys. Rev. A* **75**, 044101-1-2 (2007).
- [8] M. A. Abramowicz and S. Bajtlik, "Adding to the paradox: the accelerated twin is older", *ArXiv*: 0905.2428 (2009).
- [9] Ø. G. Grøn, "The principle of relativity and inertial dragging", *Am. J. Phys.* **77**, 373-380 (2009).
- [10] C. Møller, *The theory of Relativity* (Oxford, 1952), Chap. 8.
- [11] Ø. Grøn, *Lecture Notes on the General Theory of Relativity*, Springer (2009).
- [12] V. Faraoni and F. I. Cooperstock, "On the total energy of open Friedmann-Robertson-Walker universes", *Astrophys. J.* **587**, 483-486 (2003).
- [13] C. Schmid, "Cosmological gravitomagnetism and Mach's principle", *Phys. Rev. D* **74**, 044031 (2006).
- [14] C. Schmid, "Mach's principle: Exact frame-dragging via gravitomagnetism in perturbed Friedmann-Robertson-Walker universes with $K = (\pm 1, 0)$ ", *Phys. Rev. D* **79**, 064007 (2009).
- [15] D. R. Brill and J. M. Cohen, "Rotating masses and their effect on inertial frames", *Phys. Rev.* **143**, 1011-1015 (1966).
- [16] J. M. Cohen and D. R. Brill, "Further examples of 'Machian' effects of rotating bodies in general relativity", *Nuovo Cimento* **54**, 209-218 (1968).