

Классическая механика в гильбертовом пространстве

Д. Мауро (Италия)

Реферат подготовил М.Х. Шульман (shulman@dol.ru, www.timeorigin21.narod.ru)

arXiv:quant-ph/0301172v1 30 Jan 2003

Universita degli Studi di Trieste, Dottorato di Ricerca in Fisica - XV Ciclo
Anno Accademico 2001/2002

Topics in Koopman-von Neumann Theory (Ph.D. Thesis)

Danilo Mauro

Предисловие переводчика

Впечатляющая работа Д. Мауро по своему содержанию несравненно шире того, что представлено в настоящем реферате. Вот ее краткое оглавление:

Введение

Часть I: Теория Купмана – фон Неймана без форм

1 Волновые функции Купмана – фон Неймана

2 Связь с калибровочным полем

Часть II: Теория Купмана – фон Неймана с формами

3 Геометрические аспекты классического интеграла по путям

4 Гильбертова структура с формами: I

5 Гильбертова структура с формами: II

6 Выводы

Реферат же содержит максимально близкое к оригиналу изложение лишь некоторых фрагментов первого параграфа части I, посвященное весьма интересной связи между основами классической и квантовой механики.

Хорошо известно, пишет Д. Мауро, что классическая и квантовая механика сформулированы с помощью совершенно разного математического аппарата. Классическая механика использует фазовое пространство и скобки Пуассона, в то время как квантовая механика использует гильбертово пространство, в котором определены подходящие состояния и операторы. В литературе существует ряд попыток преодолеть это различие и улучшить взаимное понимание между ними. Эти попытки можно разделить на два направления.

Первое связано с переформулированием *квантовой* механики на “классическом” языке, заменой волновых функций на подходящие распределения (в частности, распределение Вигнера [1]) в фазовом пространстве координат и импульсов и заменой коммутаторов теории некоторыми подходящими скобками (скобками Муайля [2]), которые являются преобразованиями скобок Пуассона. См. по этой теме публикацию: “Квантовая механика в фазовом пространстве”

www.timeorigin21.narod.ru/rus_translation/Quant_mech_in_phase_space.pdf

Напротив, другое направление (которому посвящена настоящая публикация) состоит в переформулировании *классической* механики на некотором операторном языке с использованием гильбертова пространства квадратично интегрируемых функций и заменой скобок Пуассона на некоторые подходящие классические коммутаторы. Это и сделали в 30-х годах Купман (Коортман) и фон Нейман (von Neumann) ([3][4]). Исходным пунктом KvN-подхода является введение гильбертова пространства квадратично интегрируемых и комплекснозначных функций $\psi(q, p)$, квадраты модуля которых являются в точности обычными плотностями вероятности в фазовом пространстве $\rho(q, p) = |\psi(q, p)|^2$.

Я позволил себе переставить себе местами некоторые фрагменты изложения, чтобы более четко разделить свойства квантовой и классической версий механики, однако сохранил исходную нумерацию формул.

Операторный формализм квантовой механики

Как известно, квантовая механика использует гильбертово пространство, в котором определены подходящие состояния и операторы. Состояния системы описываются волновой функцией ψ , которая является комплексной величиной. В квантовой механике комплексный характер волновой функции является решающим фактором: на самом деле, в то время, как модуль ψ представляет собой квадратный корень из плотности вероятности ρ , фаза ψ также несет некоторую физическую информацию. Например, она связана со средним значением оператора импульса $\hat{p}$ и порождает хорошо известные эффекты интерференции.

Волновая функция системы удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi(q, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(q, t) \Rightarrow i\hbar \frac{\partial \psi(q, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(q, t) + V(q) \psi(q, t) \quad (1.1.8)$$

причем оператор (энергии) Шрёдингера $\hat{H} \psi(q, t)$ содержит производные *второго* порядка в его кинетическом члене. Плотность вероятности $\rho(q, t) = |\psi(q, t)|^2$ удовлетворяет уравнению непрерывности в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{j} \quad (1.1.9)$$

где мы ввели поток плотности вероятности $\mathbf{j}$:

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m} \left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* \right). \quad (1.1.10)$$

Если мы теперь запишем волновую функцию в виде $\psi = \sqrt{\rho} \exp[iS/\hbar]$, то немедленно увидим, что фаза S явно входит в выражение для потока плотности вероятности $\mathbf{j}$:

$$\mathbf{j} = \frac{\rho \nabla S}{m}. \quad (1.1.11)$$

Следовательно, уравнение эволюции (1.1.9) для ρ связывает фазу S и квадрат модуля ρ волновых функций.

Мы можем также видеть из (1.1.9), что в квантовой механике плотность вероятности ρ не эволюционирует во времени с тем же шрёдингеровским гамильтонианом $\hat{H}$, который задает эволюцию волновой функции ψ .

Одним из наиболее характерных эффектов квантовой механики является распространение волновых функций в течение их эволюции. Рассмотрим, например, *квантовую* свободную частицу с гамильтонианом

$$\hat{H} = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2}$$

и возьмем в качестве *начальной* волновой функции следующую функцию гауссовского типа:

$$\psi(q, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}a}} \exp\left(-\frac{q^2}{2a^2} + \frac{i}{\hbar} p_i q\right). \quad (1.2.1)$$

Легко проверить, что среднее значение ее координаты q равно нулю, а неопределенность измерения составляет:

$$\overline{(\Delta q)^2} = \frac{a^2}{2}.$$

В момент времени t наша функция будет равна:

$$\psi(q, t) = N \cdot \exp\left[-\frac{m}{2(ma^2 + i\hbar t)} \left(q - \frac{p_i t}{m}\right)^2 + \frac{i}{\hbar} \left(p_i q - \frac{p_i^2}{2m} t\right)\right]. \quad (1.2.2)$$

где N – нормирующий множитель. Из (1.2.2) мы можем заметить, как коэффициент p_i , который при $t = 0$ входил только в фазу волновой функции, в любой следующий момент $t > 0$ появляется также и в ее модуле. В результате математическое ожидание положения q при любом $t > 0$ явно зависит от начального фазового множителя p_i ; на самом деле, мы имеем:

$$\overline{q(t)} = \int dq q |\psi(q, t)|^2 = p_i t / m. \quad (1.2.3)$$

Таким образом, мы можем сказать, что в процессе эволюции информация о среднем значении q переносится членами, изначально заложенными в фазе ψ . Для среднеквадратического отклонения мы получаем:

$$\overline{(\Delta q(t))^2} = \overline{(q - \overline{q(t)})^2} = \frac{a^2}{2} \left(1 + \frac{t^2 \hbar^2}{m^2 a^4}\right) \quad (1.2.4)$$

откуда находим, что при $t \rightarrow \infty$ волновая функция окажется полностью делокализованной:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{(\Delta q(t))^2} = +\infty, \quad \forall a > 0. \quad (1.2.5)$$

Этот эффект будет иметь место даже если мы приготовим начальное состояние с резко выраженным пиком вокруг начальной точки. Действительно:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \overline{\Delta(q(t))^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{a^2}{2} + \frac{t^2 \hbar^2}{2m^2 a^2} \right) = +\infty, \quad \forall t > 0. \quad (1.2.6)$$

Заметим, что предшествующий предел равен $+\infty$, поскольку параметр a^2 входит в знаменатель (1.2.6). Это соотношение не является неожиданным: положив $a \rightarrow 0$ в начале, мы получаем состояние, идеально локализованное в пространстве, т.е. $\overline{(\Delta q)^2} \rightarrow 0$, но из соотношения неопределенностей Гейзенберга мы выводим, что $\overline{(\Delta p)^2} \rightarrow +\infty$. Итак, в этом случае начальный импульс является полностью неопределенным и, следовательно, даже после бесконечно малого интервала времени положение частицы также становится полностью неопределенным. Таковы хорошо известные квантовомеханические эффекты.

Итак, в квантовой механике, даже если мы начинаем с волновой функции без фазы, она в общем случае появляется в более поздние моменты времени благодаря оператору $\hat{H}$:

$$\hat{H}: \psi(\text{без фазы при } t = 0) \rightarrow \psi(\text{с фазой при последующих } t) \quad (1.2.29)$$

Пример такого явления дается (1.2.1) и (1.2.2.). Даже если мы начинаем без фазы $p_i = 0$, в момент времени t волновая функция (1.2.2) становится равной

$$\psi = N \cdot \exp \left[-\frac{m}{2(ma^2 + i\hbar t)} q^2 \right] \quad (1.2.30)$$

и обладает фазой, поскольку в знаменатель входит член $i\hbar t$. Все это является следствием того факта, что фаза и модуль волновых функций связаны в квантовой механике, как указывается в учебниках. Действительно, написав

$$\psi(q) = A(q) \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(q) \right] \quad (1.2.31)$$

и приравняв действительные и мнимые части уравнения Шрёдингера (1.1.8), мы получаем следующие два уравнения для $A(q)$ и $S(q)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + V = \frac{\hbar^2}{2mA} \frac{\partial^2 A}{\partial q^2} \\ m \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial S}{\partial q} + \frac{A}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial q^2} = 0. \end{cases} \quad (1.2.32)$$

т.е. S и A связаны между собой уравнениями движения.

Операторный формализм классической механики

Как уже отмечалось выше, в то время как квантовая механика использует гильбертово пространство, в котором определены подходящие состояния и операторы, классическая механика использует фазовое пространство и скобки Пуассона. В связи с этим было предложено *переформулировать* классическую механику на некотором операторном языке с использованием гильбертова пространства.

Купман и фон Нейман (KvN) постулировали, что эволюция $\psi(\varphi)$ должна задаваться оператором Лиувилля, который содержит производные только *первого* порядка и меняет плотности вероятностей $\rho(\varphi)$ *иначе*, чем это имеет место в квантовой механике. Присутствие производных только первого порядка в операторе Лиувилля обуславливает множество специальных следствий, в которых проявляется роль фаз в теории KvN. Например, в отличие от того, что имеет место в квантовой механике, уравнения эволюции для фазы и модулей ψ полностью *независимы*: фазы не входят в уравнения для модулей, и наоборот. Можно было бы подумать, что фазы полностью бесполезны в классической механике, и что достаточно рассматривать лишь действительные, а не комплексные волновые функции для описания всей физики. Это верно только в том случае, если мы ограничим себя рассмотрением частного представления, в котором как координаты, так и импульсы теории заданы мультипликативными операторами. Но если мы хотим сохранить за собой возможность рассматривать также другие способы представления, то можно доказать, что мы должны рассматривать комплексные волновые функции.

В принципе классические фазы функций KvN-подхода могли бы измеряться с помощью наблюдаемых, зависящих как от $\hat{\varphi}$, так и от $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, которые обобщают обычные функции классической механики, зависящие только от $\hat{\varphi}$. Из этих последних невозможно извлечь информацию о фазах.

Отправной точкой для подхода KvN к классической механике ([3], [4]) является введение гильбертова пространства *комплекснозначных* и *квадратично интегрируемых* функций $\psi(\varphi)$ таких, что $\rho(\varphi) \equiv |\psi(\varphi)|^2$ может быть интерпретирована как плотность вероятности нахождения частицы в точке $\varphi = (q, p)$ фазового пространства.

Мы знаем, что в классической статистической механике плотность вероятности ρ должна эволюционировать во времени в соответствии с хорошо известным уравнением Лиувилля¹:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \rho(\varphi) = \hat{L} \rho(\varphi) \quad (1.1.1)$$

¹ *Примечание переводчика:* В традиционных обозначениях уравнение Лиувилля в аналитической механике для стационарного случая записывается следующим образом (без умножения оператора на мнимую единицу):

$$\hat{L} \rho = \left[\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] \rho$$

где $\hat{L}$ - оператор Лиувилля

$$\hat{L} = -i\partial_{p_i}H(\varphi)\partial_{q_i} + i\partial_{q_i}H(\varphi)\partial_{p_i} \quad (1.1.2)$$

и $H(\varphi)$ - гамильтониан в стандартном фазовом пространстве.

Купман и фон Нейман *постулировали* такую же эволюция для элементов $\psi(\varphi)$ гильбертова пространства, которое они ввели:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\varphi) = \hat{L}\psi(\varphi) \implies \frac{\partial}{\partial t}\psi = (-\partial_{p_i}H\partial_{q_i} + \partial_{q_i}H\partial_{p_i})\psi. \quad (1.1.3)$$

Мы можем рассматривать (1.1.3) в качестве фундаментального уравнения, управляющего эволюцией векторов в гильбертовом пространстве классической механики: оно является аналогом уравнения Шрёдингера для квантовой механики.

Пространство, чтобы быть определенным в качестве гильбертова, должно быть оснащено скалярным произведением. KvN выбрали следующее его вид:

$$\langle\psi|\tau\rangle = \int d\varphi \psi^*(\varphi)\tau(\varphi). \quad (1.1.4)$$

Тогда норма состояний $|\psi\rangle$ есть:

$$\|\psi\|^2 = \int d\varphi \psi^*(\varphi)\psi(\varphi) = \int d\varphi \rho(\varphi). \quad (1.1.5)$$

Для такого скалярного произведения легко показать, что $\langle\psi|\hat{L}\tau\rangle = \langle\hat{L}\psi|\tau\rangle$, т.е. оператор Лиувилля $\hat{L}$ является оператором Гамильтона; следовательно,

норма состояния $\langle\psi|\psi\rangle = \int d\varphi \psi^*(\varphi)\psi(\varphi)$ в процессе эволюции сохраняется, и мы можем непротиворечивым образом интерпретировать $\rho(\varphi) = \psi^*(\varphi)\psi(\varphi)$ как плотность вероятности обнаружить частицу в некоторой точке фазового пространства.

Возвращаясь к (1.1.3), отметим, что в его правой стороне отсутствует мнимая единица “ i ”, и что оператор эволюции $\hat{L}$ содержит производные только первого порядка. Эти пункты имеют решающее значение при проверке того, что (1.1.1) может быть выведено из (1.1.3). Действительно, если мы запишем уравнение, комплексно сопряженное к (1.1.3), то получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi^* = (-\partial_{p_i}H\partial_{q_i} + \partial_{q_i}H\partial_{p_i})\psi^* \quad (1.1.6)$$

т.е. ψ и ψ^* удовлетворяют одному и тому же уравнению. Теперь, умножив (1.1.3) на ψ^* , (1.1.6) на ψ и сложив два полученных уравнения, мы снова получим (1.1.1), т.е. закон эволюции $\rho(\varphi) \equiv \psi^*(\varphi)\psi(\varphi)$ через оператор Лиувилля:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = (-\partial_{p_i}H\partial_{q_i} + \partial_{q_i}H\partial_{p_i})\rho \Rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}\rho(\varphi) = \hat{L}\rho(\varphi). \quad (1.1.7)$$

Итак, мы вывели стандартное уравнение Лиувилля для $\rho(\varphi)$ в качестве следствия из постулата (1.1.3) для ψ . Относительно (1.1.7) заметим, что уравнение движения квадрата модуля ψ , т.е. ρ , не связано с фазой ψ . Далее мы увидим, что верно и обратное, т.е. уравнение движения для фазы полностью независимо от модуля ψ .

Представленный выше анализ выделяет некоторые *принципиальные* различия между уравнением KvN (1.1.3) и уравнением Шрёдингера. Эти различия проистекают из того факта, что оператор Лиувилля содержит производные только *первого порядка*, в то время как оператор Шрёдингера содержит производные *второго порядка*. В частности, в отличие от квантовой механики, мы находим, что $[\hat{q}, \hat{p}] = 0$, откуда следует, что мы можем с произвольной точностью определить координаты и импульсы классической частицы, как это справедливо для классической механики и при стандартном подходе.

В частном случае одномерной свободной частицы, уравнение Лиувилля имеет следующий простой вид:

$$\hat{L} = -i\frac{\hat{p}}{m}\frac{\partial}{\partial q}. \quad (1.2.7)$$

При $t > 0$ волновая функция KvN для такой частицы может быть выбрана в виде:

$$\psi(q, p, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi ab}} \exp \left[-\frac{1}{2a^2} \left(q - \frac{p}{m}t \right)^2 - \frac{(p - p_i)^2}{2b^2} \right]. \quad (1.2.12)$$

Заметим, что эта $\psi(t)$ связана с начальным значением волновой функции $\psi(0)$ следующим уравнением:

$$\psi(q, p, t) = \psi \left(q - \frac{pt}{m}, p, 0 \right) = \psi \left(q - \frac{\partial H}{\partial p}t, p + \frac{\partial H}{\partial q}t, 0 \right). \quad (1.2.13)$$

В явном виде можно получить в качестве начальной функции следующую двумерную гауссиану с аргументами q и p :

$$\psi(q, p, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi ab}} \exp \left(-\frac{q^2}{2a^2} - \frac{(p - p_i)^2}{2b^2} \right) \quad (1.2.9)$$

где a и b связаны начальной неопределенностью для q и p :

$$\overline{(\Delta q)^2} = a^2/2, \quad \overline{(\Delta p)^2} = b^2/2.$$

Поскольку в классической механике $\hat{q}$ и $\hat{p}$ коммутируют, то соотношение неопределенностей не работает. Следовательно, a и b в (1.2.9) являются двумя полностью независимыми параметрами, и произведение $\overline{(\Delta q)^2} \cdot \overline{(\Delta p)^2}$ может иметь сколь угодно малое значение.

Вернемся теперь к (1.2.12) и вычислим средние значения динамических переменных в произвольный момент времени t . Они равны:

$$\bar{q} = \int dq dp q |\psi(q, p, t)|^2 = \frac{p_i t}{m}, \quad \bar{p} = \int dq dp p |\psi(q, p, t)|^2 = p_i. \quad (1.2.17)$$

Заметим, что в отличие от квантовой механики, информация о среднем значении $\hat{p}$ задается коэффициентами, которые появляются в модуле волновой функции KvN (1.2.12). Среднеквадратические отклонения равны:

$$\overline{(\Delta q(t))^2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \frac{t^2}{m^2}, \quad \overline{(\Delta p(t))^2} = \frac{b^2}{2}. \quad (1.2.18)$$

Следовательно, и в классической механике также, если $b \neq 0$, то мы получаем $\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{(\Delta q(t))^2} = +\infty$, и волновая функция KvN становится полностью делокализованной. Это не является странным, если мы учтем, что мы задали статистическое описание набора частиц с импульсом, распределенным по гауссиане вокруг p_i . Это значит, что у нас могут быть частицы с импульсом как меньше, так и больше p_i . Эти частицы вызывают рассеяние волновой функции и, следовательно, распределения вероятностей вокруг среднего значения q .

Если же мы, напротив, рассмотрим движение единичной частицы, мы можем точно измерить ее координату и импульс в начальный момент времени. В этом случае члены, параметризующие гауссианы (1.2.9) и (1.2.12), обращаются в нуль ($a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 0$). Следовательно, разбросы тождественно обращаются в нуль, поскольку в отличие от квантового случая (1.2.6), в (1.2.18) параметры a^2 и b^2 не появляются в знаменателе:

$$\lim_{a, b \rightarrow 0} \overline{(\Delta q(t))^2} = \lim_{a, b \rightarrow 0} \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \frac{t^2}{m^2} \right) = 0, \quad \lim_{a, b \rightarrow 0} \overline{(\Delta p(t))^2} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{b^2}{2} = 0. \quad (1.2.19)$$

Поскольку предшествующие соотношения справедливы для любого момента времени t , мы можем сказать, что частица остается идеально локализованной в фазовом пространстве при любом t .

Мы видим, что даже этот очень простой пример, приведенный в педагогических целях, позволяет продемонстрировать некоторые очень важные различия между квантовым и классическим подходами. Они таковы:

- 1) в классической механике мы можем узнать с абсолютной точностью q и p , поскольку $\hat{q}$ и $\hat{p}$ являются коммутирующими операторами, и поэтому для них не выполняются соотношения неопределенности;
- 2) классическая динамика, определяемая $\hat{L}$, такова, что если мы знаем с абсолютной точностью положение и импульс при $t = 0$, то они остаются идеально определенными в любой момент времени t и не расплываются;

3) информация о среднем значении импульса классической частицы дается членами, появляющимися в модулях, но не в фазах волны KvN.

Для классической свободной частицы можно показать, что даже если мы добавляем фазовый множитель к *произвольной* начальной волне KvN, то этот фазовый множитель не проходит в действительную часть в течение эволюции, в отличие от того, что происходит в квантовой механике. Этот анализ может быть распространен на случай физической системы, характеризуемой производящим оператором Лиувилля $\hat{L}$. Действительно, решение уравнения:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(q, p, t) = \hat{L}\psi(q, p, t) \quad (1.2.25)$$

дается соотношением

$$\psi(q, p, t) = \psi(\bar{q}(q, p, t), \bar{p}(q, p, t)) \quad (1.2.26)$$

где $\bar{q}$ и $\bar{p}$ являются решениями уравнений:

$$\dot{\bar{q}}_j(q, p, t) = -\frac{\partial H(\bar{q}, \bar{p})}{\partial \bar{p}_j}, \quad \dot{\bar{p}}_j(q, p, t) = \frac{\partial H(\bar{q}, \bar{p})}{\partial \bar{q}_j} \quad (1.2.27)$$

где начальные условия $\bar{q}_j(q, p, 0) = q_j^0$, $\bar{p}_j(q, p, 0) = p_j^0$. Таким образом, согласно (1.2.26), эволюция классической системы, представленной оператором Лиувилля, не меняет в представлении Шрёдингера функционального вида ψ . Отсюда немедленно следует, что если есть волна KvN без фазы в начальный момент, то фазы *не могут* появиться в процессе эволюции:

$$\hat{L}: \psi(\text{без фазы при } t=0) \rightarrow \psi(\text{без фазы при любых } t) \quad (1.2.28)$$

В классической механике, если мы исходим из

$$\psi(q, p) = F(q, p) \exp[iG(q, p)] \quad (1.2.33)$$

мы можем подставить это выражение в (1.1.3): $i\frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{L}\psi$ и, приравняв действительные и мнимые части, получаем, что как модуль, так и фаза эволюционируют в соответствии с уравнением Лиувилля:

$$i\frac{\partial F}{\partial t} = \hat{L}F, \quad i\frac{\partial G}{\partial t} = \hat{L}G. \quad (1.2.34)$$

Таким образом, мы видим, что в классической механике фаза и модуль *не связаны* между собой и вообще не взаимодействуют.

Подводя итог всему этому обсуждению, мы можем сформулировать следующий афоризм: “Что такое квантовая механика? Квантовая механика – это теория взаимодействия фазы и модуля.”

Неселективные измерения в квантовой и классической механике

Для уяснения различий и сходства между классической и квантовой механикой полезно рассмотреть вопрос об измерениях величин. Мы знаем, что в квантовой механике измерение возмущает систему и изменяет вероятности результатов последовательности измерений. Это возмущение имеет место даже при *неселективном* измерении. Неселективными называются такие измерения, которые уже выполнены, но их результаты *еще* не считаны. Как будет показано позже, в этом случае система не “коллапсирует” к конкретному собственному состоянию, но оказывается в некогерентной суперпозиции всех возможных состояний.

Эффект неселективных измерений в квантовой механике

Рассмотрим очень простой, но поучительный пример [29]. Пусть дана квантовомеханическая система, эрмитов гамильтониан которой имеет собственные значения $E_1 = \hbar\omega$; $E_2 = -\hbar\omega$ и собственные функции $|+\rangle$ и $|-\rangle$ соответственно. Рассмотрим также наблюдаемую $\hat{\Omega}$ с собственными векторами

$$|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle + |-\rangle], \quad |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle - |-\rangle]. \quad (1.6.1)$$

Выберем начальное состояние системы следующим:

$$|\psi, 0\rangle = \frac{1}{2}|+\rangle + \sqrt{\frac{3}{4}}|-\rangle. \quad (1.6.2)$$

1) Пусть система эволюционирует до момента времени $t = 2\tau$ и вычислим вероятность результата a для наблюдаемой $\hat{\Omega}$. Волновая функция в момент времени $t = 2\tau$ задается выражением

$$|\psi, 2\tau\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}2\tau} \left[\frac{1}{2}|+\rangle + \sqrt{\frac{3}{4}}|-\rangle \right] = \frac{1}{2}|+\rangle e^{-2i\omega\tau} + \sqrt{\frac{3}{4}}|-\rangle e^{2i\omega\tau}. \quad (1.6.3)$$

Таким образом, когда система описывается чистым состоянием (1.6.3), вероятность получить результат a для наблюдаемой $\hat{\Omega}$ в момент времени $t = 2\tau$ равна

$$P_P(\Omega = a | t = 2\tau) = \left| \langle \psi, 2\tau | a \rangle \right|^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{3}{4}} \cos 4\omega\tau \right). \quad (1.6.4)$$

2) Теперь выполним *неселективное* измерение (NSM) наблюдаемой $\hat{\Omega}$ в момент времени $t = \tau$. Влияет ли на вероятности в момент времени $t = 2\tau$ тот факт, что мы измеряли $\hat{\Omega}$ в момент времени $t = \tau$? Чтобы ответить на этот вопрос рассмотрим, что происходит сразу после измерения. В силу постулата о коллапсе волновой функции и того, что при NSM мы не считываем результат измерения, система будет описываться статистической смесью двух собственных значений

$|a\rangle$ и $|b\rangle$ наблюдаемой $\hat{\Omega}$, где их веса в точности будут равны вероятностям $P_a(\tau)$ и $P_b(\tau)$ того, что при $t = \tau$ будут получены результаты $|a\rangle$ и $|b\rangle$:

$$\hat{\rho}_M(\tau) = P_a(\tau)|a\rangle\langle a| + P_b(\tau)|b\rangle\langle b|. \quad (1.6.5)$$

Индекс M при $\hat{\rho}$ означает “смешанная (mixed)” и указывает, что $\hat{\rho}_M$ представляет собой смешанную матрицу плотности.

Пусть теперь система продолжает эволюционировать до момента времени $t = 2\tau$. Мы получаем, что

$$\hat{\rho}_M(2\tau) = P_a(\tau)|\psi_a, 2\tau\rangle\langle\psi_a, 2\tau| + P_b(\tau)|\psi_b, 2\tau\rangle\langle\psi_b, 2\tau| \quad (1.6.6)$$

где $|\psi_a, 2\tau\rangle$ и $|\psi_b, 2\tau\rangle$ определяются эволюцией собственных состояний $|a\rangle$ и $|b\rangle$ между моментами времени $t = \tau$ и $t = 2\tau$:

$$\begin{aligned} |\psi_a, 2\tau\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\tau}|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega\tau}|+\rangle + e^{i\omega\tau}|-\rangle\right), \\ |\psi_b, 2\tau\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\tau}|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega\tau}|+\rangle - e^{i\omega\tau}|-\rangle\right). \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

Вычислим теперь вероятность получить $\Omega = a$ как результат дальнейшего измерения $\hat{\Omega}$ в момент времени $t = 2\tau$. Мы должны найти:

$$P_M(\Omega = a|t = 2\tau) = \text{Tr}\left[\hat{\rho}_M(2\tau)|a\rangle\langle a|\right] \quad (1.6.8)$$

и результат равен

$$P_M(\Omega = a|t = 2\tau) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{3}{4}}\cos^2 2\omega\tau\right). \quad (1.6.9)$$

Заметим, что этот результат отличен от результат (1.6.4). Таким образом, мы можем заключить, что если неселективное измерение наблюдаемой $\hat{\Omega}$ выполняется в момент времени $t = 2\tau$, то он различен для случаев (1) и (2), т.е. зависит от того, проводилось или нет перед этим измерение в момент времени $t = \tau$.

Неселективные измерения $\hat{\varphi}$ в классической механике

Рассмотрим теперь измерение в классической механике.

а) Пусть нам дано начальное чистое состояние

$$\hat{\rho}_P(0_-) = |\psi, 0\rangle\langle\psi, 0|. \quad (1.6.23)$$

Затем пусть система эволюционирует до момента времени $t = \tau$, когда мы выполняем измерение над $\hat{\varphi}$. Плотность вероятности возможного результата φ' дается выражением

$$\rho_P(\varphi', \tau) = \text{Tr}\left[|\varphi'\rangle\langle\varphi'|\hat{\rho}_P(\tau)\right] = |\psi(\varphi', \tau)|^2. \quad (1.6.24)$$

Например, если мы рассматриваем гауссову волновую функцию (1.2.9), то получим для момента $t = \tau$ также $\rho_P(\varphi', \tau)$ также гауссиану со следующими средними значениями и стандартными отклонениями:

$$\bar{q} = \frac{p_i \tau}{m}, \quad \bar{p} = p_i, \quad \overline{(\Delta q(\tau))^2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \frac{\tau^2}{m^2}, \quad \overline{(\Delta p(\tau))^2} = \frac{b^2}{2}. \quad (1.6.25)$$

б) Предположим теперь вместо этого, что мы выполняем одновременное измерение при $t = 0$ координат и импульсов, т.е. измерение $\hat{\varphi}$, без считывания результата. Как и в квантовой механике, в теории KvN существует “постулат”, что после измерения система коллапсирует в собственное состояние, связанное с собственным значением, которое мы получаем. На самом деле, это типичное свойство не только квантовой механики, оно присуще любому гильбертову пространству и операторному формализму теории и его вероятностным интерпретациям. В частности, поскольку измерение $\hat{\varphi}$ при $t = 0$ является неселективным, сразу после измерения система будет описываться некоторой некогерентной суперпозицией собственных состояний $|\varphi_0\rangle$, где весовые коэффициенты равны $|\psi(\varphi_0, 0)|^2$ и представляют собой плотности вероятности, связанные с соответствующими результатами:

$$\hat{\rho}_M(0_+) = \int d\varphi_0 |\psi(\varphi_0, 0)|^2 |\varphi_0\rangle \langle \varphi_0|. \quad (1.6.26)$$

Мы хотим показать, что в отличие от того, что имеет место в квантовой механике, распределения вероятностей для φ не изменяются (по сравнению со случаем “а”, когда не выполняются измерения при $t = 0$) не только при $t = 0_+$, но также и в любой другой момент времени $t > 0$. В результате эволюции статистической смеси (1.6.26) мы получаем для момента времени $t = \tau$:

$$\hat{\rho}_M(\tau) = \int d\varphi_0 |\psi(\varphi_0, 0)|^2 |\varphi_0, \tau\rangle \langle \varphi_0, \tau|. \quad (1.6.30)$$

Если рассматриваемая система представляет собой свободную точечную частицу, то мы получаем:

$$|\varphi_0, \tau\rangle = |q_0 + p_0 \tau / m, p_0\rangle. \quad (1.6.31)$$

Далее, можно показать, что плотность вероятности получить φ' в качестве результата последующего измерения $\hat{\varphi}$ при $t = \tau$ равна:

$$\begin{aligned} \rho_M(\varphi', \tau) &= \text{Tr} \left[|\varphi'\rangle \langle \varphi'| \hat{\rho}_M(\tau) \right] / \text{Tr} \left[\hat{\rho}_M(\tau) \right] = \\ &= \int d\varphi_0 |\psi(\varphi_0, 0)|^2 \delta(q' - q_0 - p_0 \tau / m, p' - p_0) = \\ &= |\psi(q' - p' \tau / m, p', 0)|^2. \end{aligned} \quad (1.6.32)$$

Но это выражение в точности равно квадрату модуля при эволюции начального состояния $\psi(\varphi', 0)$ до момента времени $t = \tau$. Следовательно, в отличие от квантовой механики, плотности вероятности результатов измерения $\hat{\varphi}$

остаются неизменными при NSM не только при $t = 0_+$, но также и в любой другой момент времени $t > 0$. Действительно, выражение (1.6.32) представляет собой то же самое выражение, как если бы измерение при $t = 0$ не производилось. Причина этого состоит в том, что в классической механике уравнения движения для зависят лишь от φ :

$$\dot{\varphi}^a = \omega^{ab} \frac{\partial H}{\partial \varphi^b}. \quad (1.6.33)$$

Библиография

- [1] E. P. Wigner, *Phys. Rev.* 40, 749 (1932).
 - [2] J. E. Moyal, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 45, 99 (1947).
 - [3] B. O. Koopman, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 17, 315 (1931).
 - [4] J. von Neumann, *Ann. Math.* 33, 587 (1932); *ibid.* 33, 789 (1932).
 - [5] E. Gozzi, M. Reuter and W. D. Thacker, *Phys. Rev. D* 40, 3363 (1989). E. Gozzi and M. Reuter, *Phys. Lett. B* 233, 383 (1989).
 - [6] D. Mauro, *Int. J. Mod. Phys. A* 17, 1301 (2002).
 - [7] J. J. Sakurai, “*Modern Quantum Mechanics*” (Rev. Ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1995).
 - [8] E. Gozzi and D. Mauro, *Ann. Phys.* 296, 152 (2002).
 - [9] R. Abraham and J. Marsden, “*Foundations of Mechanics*” (Benjamin, New York, 1978).
 - [10] E. Gozzi and D. Mauro, *J. Math. Phys.* 41, 1916 (2000).
 - [11] D. Mauro, “*Cartan Calculus via Pauli Matrices*”, quant-ph/0208190, submitted for publication.
 - [12] E. Witten, *Nucl. Phys. B* 188, 513 (1981). E. Gozzi, *Phys. Lett. B* 233, 383 (1989).
 - [13] P. Salomonson and J. W. van Holten, *Nucl. Phys. B* 196, 509 (1982). J. W. van Holten, “*Grassmann Algebras and Spin in Quantum Dynamics*” (Lecture Notes AIO School Math. Phys., Univ. of Twente, 1992).
 - [14] E. Deotto, E. Gozzi and D. Mauro, “*Hilbert Space Structure in Classical Mechanics: (I)*”, quant-ph/0208046, submitted for publication.
 - [15] E. Deotto, E. Gozzi and D. Mauro, “*Hilbert Space Structure in Classical Mechanics: (II)*”, quant-ph/0208047, submitted for publication.
 - [16] E. Gozzi and M. Regini, *Phys. Rev. D* 62, 067702 (2000).
 - [17] T. N. Sherry and E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. D* 18, 4580 (1978). 172
- Bibliography*
- [18] A. Messiah, “*Quantum Mechanics*” (North-Holland, Amsterdam, 1961).
 - [19] A. A. Abrikosov and E. Gozzi, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* 88, 369 (2000).
 - [20] C. Cisneros et al., *Eur. J. Phys.* 19, 237 (1998).
 - [21] A. Galindo and P. Pascual, “*Quantum Mechanics*” (Springer Verlag, Berlin, 1990).
 - [22] N. P. Landsman, *Int. J. Mod. Phys. A* 6, 5349 (1991).
 - [23] G. C. Wick, A. S. Wightman and E. Wigner, *Phys. Rev.* 88, 101 (1952).
 - [24] V. I. Arnold and A. Avez, “*Ergodic Problems of Classical Mechanics*” (Benjamin, New York, 1968).
 - [25] U. Decker and F. Haake, *Phys. Rev A* 11, 2043 (1975).
 - [26] D. Forster, “*Hydrodynamic Fluctuations, Broken Symmetry, and Correlations Functions*” (Reading, Mass. W.A. Benjamin, 1975).
 - [27] R. P. Feynman, “*The Character of Physical Law*” (MIT-Press, Cambridge, 1967).
 - [28] R. P. Feynman, “*Quantum mechanics and Path Integrals*” (McGraw-Hill, New York, 1965).

- [29] G. C. Ghirardi, unpublished notes.
- [30] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* 115, 485 (1959).
- [31] C. Cohen Tannoudji et al., “*Quantum Mechanics*” (Wiley, New York, 1977).
- [32] E. T. Whittaker and G. N. Watson, “*A Course of Modern Analysis*” (Cambridge University Press, 1973).
- [33] E. Gozzi and M. Reuter, *Chaos, Solitons and Fractals* 4, 117 (1994).
- [34] I. Kol’ař, P.W. Michor and J. Slovák, “*Natural Operations in Differential Geometry*” (Springer, Berlin, 1993).
- [35] S. Coleman, “*Aspects of Symmetry*” (Cambridge, University Press, 1985).
- [36] A. Schwarz, in “*Topics in Statistical and Theoretical Physics*” (in American Mathematical Society translations, Series 2, v. 177, 1996).
- [37] E. Gozzi and E. Deotto, *Int. J. Mod. Phys. A* 16, 2709 (2001).
- [38] I. Vaisman, “*Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*” (Birkhauser, Basel, 1994).
- [39] M. Henneaux, *Phys. Rep.* 126, 1 (1985). M. Henneaux and C. Teitelboim, “*Quantization of Gauge Systems*” (Princeton, University Press, 1992).
- [40] M. de Crombrugghe and V. Rittenberg, *Ann. Phys.* 151, 99 (1983). *Bibliography* 173
- [41] A. A. Andrianov, N. V. Borisov and M. V. Ioffe, *Teor. Mat. Fiz.* 61, 183 (1984). A. A. Andrianov, N. V. Borisov, M. V. Ioffe and M. I. Eides, *Teor. Mat. Fiz.* 61, 17 (1984).
- [42] T. Eguchi, P. B. Gilkey and A. J. Hanson, *Phys. Rep.* 66, 213 (1980).
- [43] E. Gozzi and M. Reuter, *J. Phys. A* 26, 6319 (1995).
- [44] L. S. Schulman, “*Techniques and Applications of Path Integration*” (J. Wiley and Sons Publishers, New York, 1981).
- [45] A. A. Slavnov, *Phys. Lett. B* 366, 253 (1996). F. A. Lunev, *Nucl. Phys. B* 494, 433 (1997). M. S. Plyushchay, *Mod. Phys. Lett. A* 11, 397 (1996).
- [46] B. De Witt, in “*Relativity, Groups and Topology*”, vol. II (B. De Witt, R. Stora Eds., North-Holland, Amsterdam, 1984).
- [47] R. G. Littlejohn, *Phys. Rep.* 138, 193 (1986).
- [48] B. Konstant, *Symp. Math.* 14, 139 (1974).
- [49] B. De Witt, “*Supermanifolds*” (Cambridge University Press, Cambridge, 1984).
- [50] N. Woodhouse, “*Geometric Quantization*” (Clarendon Press, Oxford, 1980).
- [51] M. Reuter, *Int. J. Mod. Phys. A* 13, 3835 (1998)