

М. Гондран, А. Гондран (Франция)

Причинно-следственная интерпретация ЭПР-Б эксперимента

Перевод М.Х. Шульмана (shulman@dol.ru)

arXiv:0806.4577v1 [quant-ph] 27 Jun 2008

A causal interpretation of EPR-B experiment

Michel Gondran

EDF, Research and Development, 92140 Clamart, France

michel.gondran@numericable.com

Alexandre Gondran

SET, University of Technology Belford Montbéliard, France

alexandre.gondran@utbm.fr

June 27, 2008

Аннотация

В статье исследуется двухэтапная версия ЭПР-Б эксперимента. Ее теоретическое описание в пространстве и времени позволяет нам опровергнуть классическую "невозможность" декомпозиции пары запутанных атомов на два различных состояния, по одному на каждый атом. Предлагается новая причинно-следственная интерпретация ЭПР-Б эксперимента, в которой каждый атом характеризуется положением в пространстве и спином, тогда как синглетная волновая функция удовлетворяет уравнению Паули для двух частиц.

1 Введение

Несепарабельность – один из самых загадочных аспектов квантовой механики. В течение более 30 лет предложенная Бомом [5, 6] версия эксперимента Эйнштейна-Подольского-Розена [1], теорема Белла [2] и BCHSH-неравенства [2, 3, 4] были в центре дискуссий о скрытых параметрах и нелокальности; но до настоящего времени точная природа физического процесса, лежащего в основе "нелокальных" корреляций между спинами частиц, все еще остается неясной.

Множество экспериментов, выполненных после появления статьи Белла, подтверждало нарушение его неравенств и справедливость квантовой теории [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. Первый из них был осуществлен с парами запутанных фотонов и ясно подтвердил нарушение неравенства Белла [10, 11, 12, 13]. В раннем эксперименте [9] исследовались также запутанные протоны. Генерация ЭПР-пар массивных атомов вместо безмассовых фотонов рассматривалась в [14, 15]; там также было экспериментально показано нарушение неравенств Белла при эффективном детектировании [15].

В новом эксперименте Цайлингер и др. [26] измерили до этого не исследованные корреляции между двумя запутанными фотонами и показали, что эти корреляции нарушают неравенство Легетта для нелокальных реалистических теорий [25].

Обычный вывод из всех этих экспериментов – отклонение нелокального реализма вследствие невозможности декомпозиции пары запутанных атомов на два состояния, по одному на каждый атом.

В настоящей статье показано, что такая декомпозиция возможна: существует причинно-следственная интерпретация, в которой каждый атом характеризуется положением в пространстве и спином, тогда как синглетная волновая функция удовлетворяет уравнению Паули для двух частиц.

Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим двухэтапную версию ЭПР-Б эксперимента, используя аналитическое выражение для волновой функции и плотность вероятности. Явное решение получается с помощью полного интегрирования уравнения Паули для двух частиц *по времени и пространству*.

Первая причинно-следственная интерпретация ЭПР-Б эксперимента была предложена в 1987 году Дьюдни, Холландом и Киприанидисом [21, 22]. Эта интерпретация обладала тем недостатком, что модуль спина каждой частицы изменялся в ходе эксперимента от 0 до $\frac{\hbar}{2}$. Возможно, по этой причине научное сообщество не приняло ее, посчитав решением *ad hoc*.

Явное решение в терминах спиноров Паули для двух частиц и плотности вероятности для двухэтапного ЭПР-Б эксперимента приведено в разделе 2. Это решение во времени и пространстве показывает, как можно определить тесты пространственного квантования частиц, подобные опыту Штерна-Герлаха.

В разделе 3 приводится реалистическое объяснение запутанных состояний и метод распутывания волновой функции двух частиц.

Пространственное решение уравнения Паули имеет существенное значение: оно обеспечивает пространственное квантование в разделе 2 и объясняет детерминизм и распутывание в разделе 3.

2 Двухэтапная версия ЭПР-Б эксперимента

На рис.1 показана схема эксперимента Эйнштейна-Подольского-Розена-Боба. Источник S создает в точке O пары идентичных атомов A и B , но с противоположными спинами. Атомы A и B разделяются вдоль оси Oy в противоположных направлениях и движутся к двум идентичным приборам Штерна-Герлаха \mathcal{A} and \mathcal{B} .

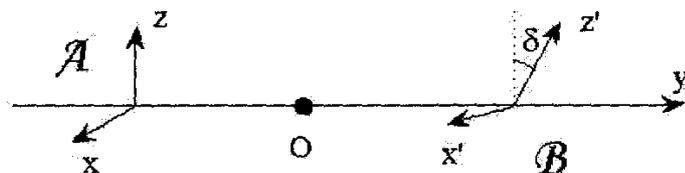


Рисунок 1: Схематическая конфигурация ЭПР-Б эксперимента.

Электромагнит \mathcal{A} "измеряет" спин A в направлении оси Oz , а электромагнит \mathcal{B} "измеряет" спин B в направлении оси Oz' , которая повернута на угол δ относительно оси Oz вокруг оси Oy .

Будем далее считать, что атомы A и B могут быть представлены гауссовыми волновыми пакетами по осям x и z . Начальная волновая функция запутанного состояния является синглетным состоянием:

$$\Psi_0(x_A, z_A, x_B, z_B) = f(x_A, z_A)f(x_B, z_B) \frac{1}{\sqrt{2}}(|+A\rangle|-B\rangle - |-A\rangle|+B\rangle) \quad (1)$$

где, например, $f(x, z) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2+z^2}{4\sigma_0^2}}$, $|\pm_A\rangle$ и $|\pm_B\rangle$ – собственные векторы операторов σ_{zA} и σ_{zB} : $\sigma_{zA}|\pm_A\rangle = \pm|\pm_A\rangle$, $\sigma_{zB}|\pm_B\rangle = \pm|\pm_B\rangle$. Мы используем классическую зависимость от y : скорость $-v_y$ для А и v_y для В.

Волновая функция двух идентичных частиц А и В, электрически нейтральных и обладающих магнитным моментом μ_0 , при наличии магнитного поля имеет 4 компоненты $\Psi^{i_1, i_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$ и удовлетворяет уравнению Паули для двух частиц:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi^{i_1, i_2}}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_A - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_B \right) \Psi^{i_1, i_2} + \mu B_{Ai} (\sigma_i)_{j_1}^{i_1} \Psi^{j_1, i_2} + \mu B_{Bi} (\sigma_i)_{j_2}^{i_2} \Psi^{i_1, j_2} \quad (2)$$

при начальных условиях:

$$\Psi^{i_1, i_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) = \Psi_0^{i_1, i_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (3)$$

где σ_i – матрицы, а $\Psi_0^{i_1, i_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ – заданные функции. В базисе $|\pm_A\rangle$ и $|\pm_B\rangle$ начальное условие $\Psi_0^{i_1, i_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ соответствует синглетному состоянию (1).

В качестве конкретных числовых значений мы берем значения из опыта Штерна-Герлаха с атомами серебра [18, 19]. Для атома серебра $m = 1,8 \times 10^{-25}$ кг, $v_y = 500$ м/с, $\sigma_0 = 10^{-4}$ м. Для электромагнитного поля \mathbf{B} , $B_x = B'_0 x$; $B_y = 0$ и $B_z = B_0 - B'_0 z$ при $B_0 = 5$ Тл, $B'_0 = \left| \frac{\partial B}{\partial z} \right| = - \left| \frac{\partial B}{\partial x} \right| = 10^3$ Тл/м при длине $\Delta l = 1$ см. Экран, на который попадают атомы, удален на расстояние $D = 20$ см (время $t = \frac{D}{v_y} = 4 \times 10^{-4}$ с) после вылета из области магнитного поля.

Одной из трудностей интерпретации ЭПР-Б эксперимента является наличие двух одновременных измерений. Выполняя эти измерения одно после другого, мы облегчаем интерпретацию эксперимента. В этом состоит цель двухэтапной версии ЭПР-Б эксперимента, исследуемой ниже.

2.1 Первый этап: Измерение спина атома А и положения атома В

На первом этапе мы выполним – применительно к паре частиц А и В в синглетном состоянии – "измерение" Штерна-Герлаха для атома А, а для атома В – простое измерение при ударе об экран. Это – эксперимент, предложенный впервые в 1987 году Дьюдни, Холландом и Киприанидисом [21].

Пусть в момент t_0 частица А достигает входа в электромагнит (\mathcal{A}). Волновая функция в момент времени $t_0 + t$ может быть поочередно вычислена из волновой функции (1) в базисе $|\pm_A\rangle, |\pm_B\rangle$. После выхода из области магнитного поля \mathcal{A} в момент $t_0 + t + \Delta t$ волновая функция (1) станет равной [19]:

$$\Psi(x_A, z_A, x_B, z_B, t_0 + t + \Delta t) = \frac{1}{\sqrt{2}} f(x_B, z_B) \left[\begin{aligned} & f^+(x_A, z_A, t) |+_A\rangle |-_B\rangle \\ & - f^-(x_A, z_A, t) |-_A\rangle |+_B\rangle \end{aligned} \right] \quad (4)$$

где

$$f^\pm(x, z, t) = f(x, z \mp z_\Delta \mp ut) e^{i\left(\frac{\pm m u z}{\hbar} + \varphi^\pm(t)\right)} \quad (5)$$

и

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{v_y} = 2 \times 10^{-5} s, \quad z_{\Delta} = \frac{\mu_0 B'_0 (\Delta t)^2}{2m} = 10^{-5} m,$$

$$u = \frac{\mu_0 B'_0 (\Delta t)}{m} = 1 m/s. \quad (6)$$

Атомная плотность $\rho(z_A, z_B, t_0 + t + \Delta t)$ находится путем интегрирования выражения

$$\Psi(x_A, z_A, x_B, z_B, t_0 + t + \Delta t) \Psi(x_A, z_A, x_B, z_B, t_0 + t + \Delta t)$$

по x_A и x_B :

$$\rho(z_A, z_B, t_0 + t + \Delta t) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(z_B)^2}{2\sigma_0^2}} \quad (7)$$

$$\times (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{(z_A - z_{\Delta} - ut)^2}{2\sigma_0^2}} + e^{-\frac{(z_A + z_{\Delta} + ut)^2}{2\sigma_0^2}} \right).$$

Мы получаем, что луч частиц А разделяется на два, в то время как луч В остается нерасщепленным. Этот результат легко может быть проверен экспериментально.

Более того, заметим, что пространство квантования частицы идентично тому же пространству незапутанной частицы в приборе Штерна-Герлаха: расстояние $\delta z = 2(z_{\Delta} + ut)$ между двумя областями локализации N^+ (спин +) и N^- (спин -) семейства частиц А то же, что и расстояние между двумя областями локализации N^+ and N^- для частицы в классическом опыте Штерна-Герлаха [19]. Этот результат легко может быть проверен экспериментально. В конечном счете из (7) мы получаем, что :

- плотность А одинакова независимо от того, запутана ли частица А с В, или нет,
- на плотность В не влияет факт "измерения" А.

Эти два предсказания квантовой механики могут быть проверены. В процесс вовлечены лишь спины. Из (4) мы заключаем, что спины А и В в течение эксперимента остаются противоположными.

2.2 Второй этап: "Измерение" спина атома А, а затем спина атома В.

Второй этап является продолжением первого и завершением реализации двухэтапного ЭПР-Б эксперимента. Для пары частиц А и В в синглетном состоянии сначала мы выполнили "измерение" Штерна-Герлаха над атомом А за период времени между t_0 и $t_0 + t + \Delta t$, а затем "измерение" Штерна-Герлаха над атомом В в электромагните \mathcal{B} , образующим угол δ с \mathcal{A} на интервале времени от $t_0 + t + \Delta t$ до $t_0 + 2(t + \Delta t)$.

После выхода из магнитного поля \mathcal{A} , в момент времени $t_0 + t + \Delta t$, волновая функция дается выражением (4). Сразу после "измерения" А, еще в момент $t_0 + t + \Delta t$, если результат измерения есть \pm , условные волновые функции для В равны:

$$\Psi_{B/\pm A}(x_B, z_B, t_0 + t + \Delta t) = f(x_B, z_B)|\mp B\rangle. \quad (8)$$

Для измерения В мы используем базис $|\pm' B\rangle$. Таким образом, после измерения В, в момент времени $t_0 + t + \Delta t$ условные волновые функции В равны:

$$\begin{aligned} \Psi_{B/+A}(x'_B, z'_B, t_0 + 2(t + \Delta t)) &= \cos \frac{\delta}{2} f^+(x'_B, z'_B, t)|+'B\rangle \\ &\quad + \sin \frac{\delta}{2} f^-(x'_B, z'_B, t)|-'B\rangle, \\ \Psi_{B/-A}(x'_B, z'_B, t_0 + 2(t + \Delta t)) &= -\sin \frac{\delta}{2} f^+(x'_B, z'_B, t)|+'B\rangle \\ &\quad + \cos \frac{\delta}{2} f^-(x'_B, z'_B, t)|-'B\rangle. \end{aligned}$$

Мы, следовательно, получаем в итоге этого двухэтапного ЭПР-Б эксперимента те же результаты для пространственного квантования и корреляций спинов, что и в стандартном ЭПР-Б эксперименте.

3 Причинно-следственная интерпретация ЭПР-Б эксперимента

Мы предполагаем, что в момент создания пары запутанных частиц А и В каждая из них обладает начальной волновой функцией $\Psi_A^0(\mathbf{r}_A, \theta_A^0, \varphi_A^0)$ и $\Psi_B^0(\mathbf{r}_B, \theta_B^0, \varphi_B^0)$ со спинорами, образующими противоположные спины, например:

$$\Psi_A^0(\mathbf{r}_A, \theta_A^0, \varphi_A^0) = f(\mathbf{r}_A)(\cos \frac{\theta_A^0}{2}|+A\rangle + \sin \frac{\theta_A^0}{2} e^{i\varphi_A^0}|-A\rangle)$$

и

$$\Psi_B^0(\mathbf{r}_B, \theta_B^0, \varphi_B^0) = f(\mathbf{r}_B)(\cos \frac{\theta_B^0}{2}|+B\rangle + \sin \frac{\theta_B^0}{2} e^{i\varphi_B^0}|-B\rangle)$$

где

$$\theta_B^0 = \pi - \theta_A^0 \text{ и } \varphi_B^0 = \varphi_A^0 - \pi.$$

Тогда принцип Паули говорит нам, что эта двухчастичная волновая функция должна быть антисимметричной; после вычислений находим:

$$\Psi^0(\mathbf{r}_A, \theta_A, \varphi_A, \mathbf{r}_B, \theta_B, \varphi_B) = -e^{i\varphi_A} f(\mathbf{r}_A)f(\mathbf{r}_B)(|+A\rangle|-B\rangle - |-A\rangle|+B\rangle)$$

что с точностью до множителя совпадает с синглетным состоянием (1).

Итак, мы можем рассматривать синглетную волновую функцию как волновую функцию семейства двух фермионов А и В с противоположными спинами: направление начальных спинов А и В существует, но *неизвестно*. Это и есть локальный скрытый параметр, который, следовательно, должен быть добавлен к начальным условиям модели.

Это не является интерпретацией синглетной волновой функции в духе школы Бома [21, 22, 24, 23]; там, например, предполагается, что в начальный момент каждая из частиц А и В имеют нулевой спин.

Остается определить волновую функцию и траектории частиц А и В: исходя из запутанной волновой функции, начальные спины и начальные положения каждой частицы.

Мы далее предполагаем, что начальное положение частицы А $(x_0^A, y_0^A = 0, z_0^A)$ известно, равно как и положение частицы В $(x_0^B = x_0^A, y_0^B = y_0^A = 0, z_0^B = z_0^A)$.

3.1 Этап 1: Измерение спина атома А и положения атома В

Уравнение (4) показывает, что спины А и В на этапе 1 остаются противоположными. Уравнение (7) показывает, что плотности А и В независимы; для А она равна плотности семейства свободных частиц в классическом устройстве Штерна-Герлаха, для которых начальная ориентация спина была выбрана произвольным образом; для В – также равна плотности семейства свободных частиц.

Спин частицы А, в соответствии с положением частицы в ее волне, постепенно приобретает ориентацию “+” или “—”. Спин частицы В следует за спином А, оставаясь ему противоположным.

В уравнении (4) частица А может рассматриваться в качестве независимой относительно В. Мы можем тогда записать ее волновую функцию

$$\Psi_A(x_A, z_A, t_0 + t + \Delta t) = \cos \frac{\theta_0^A}{2} f^+(x_A, z_A, t) | +A \rangle + \sin \frac{\theta_0^A}{2} e^{i\varphi_A^0} f^-(x_A, z_A, t) | -A \rangle \quad (9)$$

которая та же, что и у свободной частицы в приборе Штерна-Герлаха, и чей начальный спин дается $(\theta_0^A, \varphi_A^0)$.

Таким образом, уравнение ее траектории дается следующими дифференциальными уравнениями:

на интервале времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$:

$$\frac{dz_A}{dt} = \frac{\mu_0 B_0' t}{m} \cos \theta(z_A, t) \cdot c \quad \tan \frac{\theta(z_A, t)}{2} = \tan \frac{\theta_0}{2} e^{-\frac{\mu_0 B_0' t^2 z_A}{2m\sigma_0^2}} \quad (10)$$

при начальном условии $z_A(t_0) = z_0^A$;

а на интервале времени $t_0 + \Delta t + t$ ($t \geq 0$):

$$\frac{dz_A}{dt} = u \frac{\tanh\left(\frac{(z_\Delta + ut)z_A}{\sigma_0^2}\right) + \cos \theta_0}{1 + \tanh\left(\frac{(z_\Delta + ut)z_A}{\sigma_0^2}\right) \cos \theta_0}$$

и

$$\tan \frac{\theta(z_A(t), t)}{2} = \tan \frac{\theta_0}{2} e^{-\frac{(z_\Delta + ut)z_A}{\sigma_0^2}}. \quad (11)$$

Здесь $\theta(z_A(t), t)$ описывает эволюцию ориентации спина А. Случай частицы В – иной. Частица В следует по прямолинейной траектории с $y_B(t) = v_y t$, $z_B(t) = z_0^B$ и $x_B(t) = x_0^B$. Напротив, ориентация ее спина эволюционирует, при этом $\theta^B(t) = \pi - \theta(z_A(t), t)$ и $\varphi^B(t) = \varphi(z_A(t), t) - \pi$. Мы можем теперь представить волновую функцию в виде:

$$\Psi_B(x_B, z_B, t_0 + t + \Delta t) = f(x_B, z_B) \left[\cos \frac{\theta^B(t)}{2} |+_B\rangle + \sin \frac{\theta^B(t)}{2} e^{i\varphi^B(t)} |-_B\rangle \right]. \quad (12)$$

Эта волновая функция является характерной, т.к. она зависит от начальных условий для А (координат и спинов). Ориентация спина частицы В управляется частицей А через *синглетную волновую функцию*. Таким образом, настоящим нелокальным скрытым параметром оказывается синглетная волновая функция.

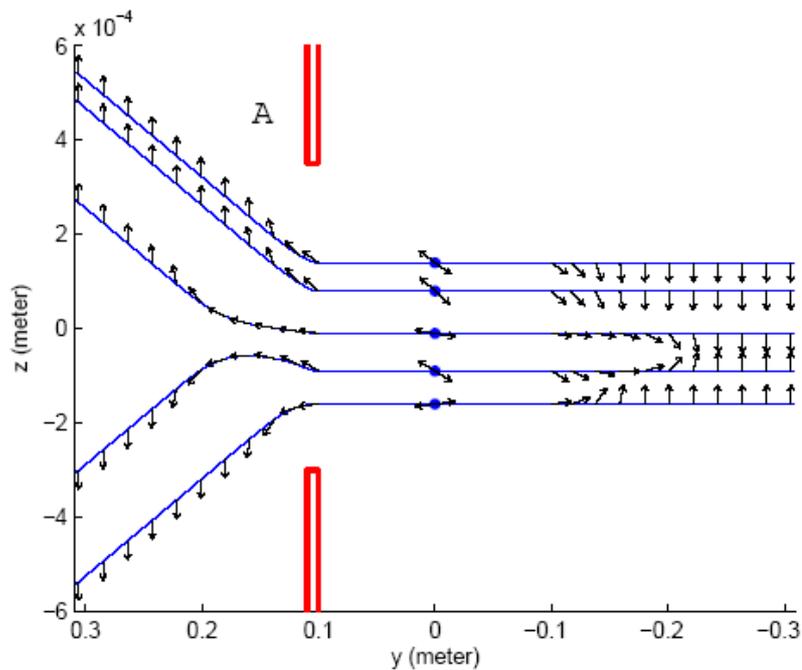


Рисунок 2: Пять пар траекторий запутанных частиц. Стрелки показывают ориентацию спина.

На рис. 2 показаны в плоскости (z, y) траектории набора из 5 пар запутанных атомов, чьи начальные характеристики $(\theta_0^A = \pi - \theta_0^B, z_A^0 = z_B^0)$ были выбраны случайным образом. Эти траектории будут, следовательно, зависеть как от начального положения z^0 , так и от начальной ориентации θ_0 спина. Поскольку начальная ориентация спина различная, траектории частиц А могут пересекаться.

3.2 Этап 2: "Измерение" спина атома А, а затем спина атома В.

До момента времени $t_0 + t + \Delta t$ мы имеем случай этапа 1. Сразу после "измерения" А в момент $t_0 + t + \Delta t$, если измерение над А дает "±", условная волновая функция для В равна:

$$\Psi_{B/\pm A}(x_B, z_B, t_0 + t + \Delta t) = f(x_B, z_B) | \mp B \rangle. \quad (13)$$

Тогда положение частицы В есть (x_0^B, z_0^B) . Мы получаем в точности случай частицы в области магнита \mathcal{B} прибора Штерна-Герлаха, образующего угол δ с магнитом \mathcal{A} .

Чтобы измерить спин В, мы используем базис $|\pm' B\rangle$. Таким образом, после измерения В в момент времени $t_0 + 2(t + \Delta t)$ условные волновые функции для В равны:

$$\begin{aligned} \Psi_{B/+A}(x'_B, z'_B, t_0 + 2(t + \Delta t)) &= \cos \frac{\delta}{2} f^+(x'_B, z'_B, t) | +'_B \rangle \\ &\quad + \sin \frac{\delta}{2} f^-(x'_B, z'_B, t) | -'_B \rangle, \\ \Psi_{B/-A}(x'_B, z'_B, t_0 + 2(t + \Delta t)) &= -\sin \frac{\delta}{2} f^+(x'_B, z'_B, t) | +'_B \rangle \\ &\quad + \cos \frac{\delta}{2} f^-(x'_B, z'_B, t) | -'_B \rangle \end{aligned}$$

и мы снова обнаруживаем квантовые корреляции.

4 Заключение

Из волновой функции двух запутанных частиц мы нашли спины, траектории, а также волновую функцию для каждой из двух частиц.

В этой интерпретации квантовая частица имеет локализованное положение подобно классической частице, но обладает также нелокальным поведением в соответствии с волновой функцией. Это фундаментальное новшество, вносимое в квантовую механику.

Таким образом, имеется волновая функция, порождающая новые, неклассические свойства. Мы можем сохранить видение локального реалистического мира для частицы, но должны к этому добавить нелокальное видение через волновую функцию.

Следовательно, подлинным скрытым параметром является волновая функция. Она несепарабельна и нелокальна. Как и в интерпретации де Бройля – Бома, волновая функция управляет частицей, а также создает несепарабельность двух запутанных частиц.

Как мы видели на этапе 1, нелокальные влияния в ЭПР-Б эксперименте касаются только ориентации спина, но не движения частиц самих по себе. Это – ключевой момент в поисках физического объяснения нелокальных влияний.

Ссылки

[1] Einstein, A., Podolsky, B., Rosen, N.: Can quantum mechanical description of reality be considered complete?. Phys. Rev. 47,777-780 (1935) .

- [2] Bell, J. S.: On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. *Physics* 1, 195 (1964).
- [3] Clauser, J.F., Horne, M.A., Shimony, A., Holt, R. A.: Proposed experiments to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.* 23, 880 (1969).
- [4] Bell, J. S.: *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*. Cambridge University Press (1987).
- [5] Bohm, D.: *Quantum Theory*. New York, Prentice-Hall (1951).
- [6] Bohm, D., Aharonov, Y.: Discussion of experimental proofs for the paradox of Einstein, Rosen and Podolsky. *Phys. Rev.* 108, 1070 (1957).
- [7] Freedman, S.J., Clauser, J.F.: Experimental test of local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.* 28, 938 (1972).
- [8] Fry, E. S., Thompson, R.C.: Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories. *Phys. Rev. Lett.* 37, 465 (1976).
- [9] Laméhi-Rachti, M., Mittig, W.: *Phys. Rev. D* 14, 2543 (1976).
- [10] Aspect, A., Grangier, P., Roger, G.: Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedanken Experiment: a new violation of Bell's inequalities. *Phys. Rev. Lett.* 49, 91 (1982).
- [11] Aspect, A., Dalibard, J., Roger, G.: Experimental tests of Bell's inequalities using variable analysers. *Phys. Rev. Lett.* 49, 1804 (1982).
- [12] Tittel, W., Brendel, J., Zbinden, H., Gisin, N.: Violation of Bell inequalities by photons more than 10 km apart. *Phys. Rev. Lett.* 81, 3563 (1998).
- [13] Weihs, G., Jennewein, T., Simon, C., Weinfurter, H., Zeilinger, A.: Violation of Bell's inequalities under strict Einstein locality condition. *Phys. Rev. Lett.* 81, 5039 (1998).
- [14] Beige, A., Munro, W.J., Knight, P.L.: A Bell's inequality test with entangled atoms. *Phys. Rev. A* 62, 052102-1-052102-9 (2000).
- [15] Rowe, M.A., Kielpinski, D., Meyer, V., Sackett, C.A., Itano, W.M., Monroe, C., Wineland, D.J.: Experimental violation of a Bell's inequality with efficient detection. *Nature* 409, 791-794 (2001).
- [16] Bertlmann, R.A., Zeilinger, A. (eds.): *Quantum [un]speakables, from Bell to Quantum information*, Springer (2002).
- [17] Genovese, M.: Research on hidden variables theories: a review of recent progress. *Phys. Repts.* 413, 319 (2005).
- [18] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., Laloe, F.: *Quantum Mechanics*, Wiley, New York (1977).
- [19] Gondran, M., Gondran, A.: A complete analysis of the Stern-Gerlach experiment using Pauli spinors. *quant-ph/051276* (2005).
- [20] Gondran, M., Gondran, A.: Numerical simulation of the double-slit interference with ultracold atoms. *Am. J. Phys.* 73, 6 (2005).
- [21] Dewdney, C., Holland, P.R., Kyprianidis, A.: A causal account of non-local Einstein-Podolsky-Rosen spin correlations. *J. Phys. A: Math. Gen.* 20, 4717-32 (1987).
- [22] Dewdney, C., Holland, P.R., Kyprianidis, A., Vigier, J.P.: *Nature*, 336, 536-44 (1988).
- [23] Bohm, D., Hiley, B.J.: *The Undivided Universe*. Routledge, London and New York (1993).
- [24] Holland, P.R.: *The quantum Theory of Motion*, Cambridge University Press (1993).
- [25] Leggett, A.: Nonlocal hidden-variable theories and quantum mechanics: An incompatibility theorem. *Found. Phys.* 33, 1469-1493 (2003).
- [26] S. Groblacher, T. Paterek, R. Kaltenbaek, C. Brukner, M. Zukowski, M. Aspelmeyer and A. Zeilinger, "An experimental test of non-local realism", *Nature*, **446**, 871-875 (2007).