

Бом, Бом... Как много дум наводит он!

(Редакция 2.2: 24.08.2017)

1. Уравнение Шрёдингера, вероятностная интерпретация Борна

Как хорошо известно, в 1926 году Эрвин Шрёдингер, развивая идею Луи де Бройля о наличии у квантовых частиц волновых свойств [de Broglie, 1923], сформулировал волновое уравнение [Schrödinger, 1926] для описания квантовомеханической системы

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V)\psi$$

где ψ - волновая функция, $\hbar$ - постоянная Планка, $V(x,t)$ – потенциальное поле, действующее на частицу массы m .

“<...> Увидев, что [это] уравнение подобно уравнению с мнимым коэффициентом диффузии, Шрёдингер ослабил свое первоначальное требование о вещественности ψ и допустил возможность комплексных значений для механического полевого скаляра ψ <...>. В заключительном разделе [своей] статьи Шрёдингер обсудил физический смысл ψ . Он интерпретировал $\psi\psi^*$ как весовую функцию в конфигурационном пространстве, которая задает электродинамические флуктуации пространственной плотности электрических зарядов и заключил, что ψ -функция должна быть, не более и не менее, как средством ... математически охватить и представить всю совокупность таких флуктуаций с помощью единственного дифференциального уравнения в частных производных... не нужно и не следует искать для самой ψ -функции в общем случае прямой интерпретации в трехмерном пространстве...” [Jammer, 1967].

Летом 1926 года появилась знаменитая вероятностная интерпретация Макса Борна, принесящая ему Нобелевскую премию.

“Для Борна вероятность (постольку, поскольку она была связана с волновой функцией) была не просто математической абстракцией, это было нечто, наделенное физической реальностью, ибо она менялась во времени и в пространстве в согласии с уравнением Шрёдингера. Впрочем, от обычных физических величин она фундаментально отличалась тем, что не переносила энергии или импульса. Поскольку в классической физике, будь то механика Ньютона или электродинамика Максвелла, физически ‘реальным’ признавалось только то, что переносило энергию или импульс (или и то, и другое), онтологический статус ψ следовало считать каким-то промежуточным... Законы природы, как стали утверждать с этого момента Борн и Гейзенберг, определяют не появление события, а вероятность его появления...”

Придя к интерпретации ψ как вероятностной волны в только что описанном смысле, но памятуя, что ψ можно разложить по полному

ортонормированному набору собственных функций $\langle \dots \rangle$, Борн должен был спросить себя, какой смысл следует приписать коэффициентам $[c_n]$ этого разложения $\langle \dots \rangle$. Он полагал, “что интеграл $\int |\psi(q)|^2 dq$ можно рассматривать как число частиц, а $|c_n|^2$ – как статистическую частоту появления состояния, характеризуемого индексом n ”. Для проверки этого предположения Борн вычислил $\langle \dots \rangle$ ожидаемое значение энергии и получил для нее правильные собственные значения. [Jammer, 1967]

2. Модель Бом

В 1952 г. Дэвид Бом опубликовал две статьи [Bohm, 1952], в которых предложил нетривиальный подход к дальнейшему развитию квантовой механики. С чисто формальной точки зрения его предложение сводилось к тому, чтобы от одного уравнения для комплексной волновой функции перейти к двум уравнениям для двух действительных величин – амплитуды $R(\vec{x}, t)$ и фазы $S(\vec{x}, t)$ волновой функции. Обозначим

$$\psi = R \cdot \exp(iS / \hbar)$$

В случае одной квантовой частицы, используя это выражение и уравнение Шрёдингера, и обозначив $\rho = R^2$, можно получить:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \frac{\nabla S}{m} \right) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V + Q = 0,$$

где $Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\Delta R}{R}$ – так называемый квантовый потенциал.

В классической механике функция S интерпретируется как действие, ее производная по времени $\partial S / \partial t$ – как энергия, а $\nabla S / m$ – как скорость. Полученные соотношения можно интерпретировать как уравнение непрерывности и уравнение баланса энергии, однако в этом последнем выражении появляется принципиально новое слагаемое – *квантовый потенциал* Q .

В случае N частиц можно ввести волновую функцию

$$\psi = R(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, t) \cdot \exp[iS(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, t) / \hbar]$$

и определить $3N$ -мерную траекторию в конфигурационном пространстве, которая описывает поведение каждой частицы в системе. Скорость i -ой частицы равна

$$\vec{v}_i = \nabla_i S(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, t) / m$$

Аналогично случаю с одной частицей, с помощью величины R определяется квантовый потенциал

$$U(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N) = -\frac{\hbar^2}{2mR} \sum_{k=1}^N \Delta_k R(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N)$$

причем $\rho(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, t) = R^2$ равно плотности представляющих точек $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N)$ в нашем $3N$ -мерном ансамбле.

Еще раз отметим, что наличие квантового потенциала отличает квантовое описание от классического, где никакого аналога этому члену нет. Квантовый потенциал обеспечивает в общем случае так называемую запутанность между частицами, т.е. тот факт, что отдельные траектории (которые в бомовской интерпретации имеют физический смысл) не независимы одна от другой и не описываются отдельными независимыми волновыми функциями. Очень важно, что квантовый потенциал в конфигурационном пространстве при изменении волновой функции, как принято считать, изменяется *мгновенно*, и этот механизм отвечает за нелокальные корреляции, столь характерные для квантовой механики. Человеком же эти мгновенные изменения скорее воспринимаются как сверхсветовой обмен информацией ([Styer et al., 2002]).

Тезис о нелокальности квантового потенциала, насколько мне известно, нигде строго не доказывается. Высказываются лишь косвенные соображения, основанные на том, что координаты одной из частиц квантовой системы с его помощью оказываются зависимыми от координат всех остальных частиц системы и, в частности, таким образом, не только волновая функция управляет движением частицы, но и частица оказывает обратное воздействие на волновую функцию системы. Гипотетически, однако, из этого не следует, что подобные воздействия передаются мгновенно, а не, скажем, со скоростью света в вакууме.

С другой стороны, нелокальность квантовой механики (независимо от модели Бома) является в настоящее время общепризнанным фактом, который, тем не менее, представляется парадоксальным. В 2017 г. нами были опубликованы работы [Белинский и Шульман, 2017a] и [Belinsky and Shulman, 2017b], в которых мы попытались объяснить эту парадоксальность эффектом теории относительности, очень близким к известному парадоксу близнецов. Именно это объяснение и привело автора обзора к глубокой заинтересованности теорией Бома.

3. Формулировка дуализма в модели Бома

Остановимся на двух возможных представлениях о дуализме “волна – частица”. Возможны два подхода [Oriols and Mompert, 2012]:

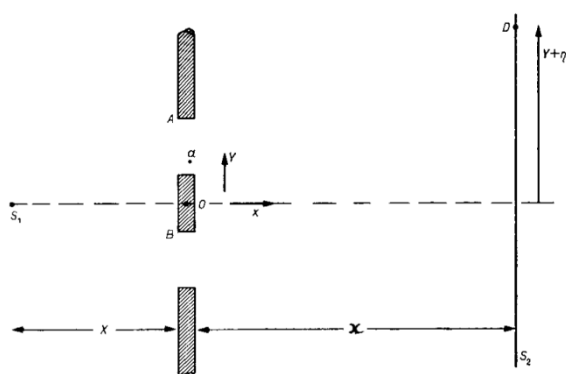
- “Волна ИЛИ частица”: Гейзенберг, Паули, Дирак, Йордан и многие другие считали, что в зависимости от экспериментальной ситуации следует выбирать то ИЛИ иное описание поведения квантовой системы. Электроны ассоциируются с амплитудами вероятности. Корпускулярная природа электрона проявляется, когда мы измеряем его координату. Выражаясь словами Бора, объект не может быть одновременно и тем и другим (это принято называть копенгагенской интерпретацией квантовой механики)¹.
- “Волна И частица”: де Бройль, со своей стороны, считал, что понятия волны и частицы сливаются на уровне атомных масштабов, где волна-пилот направляет траектории электронов. В одно и то же время существуют сразу два объекта, а не какой-либо один из них.

¹ Углубленный теоретический анализ соотношения дополненности приводит к неравенству $V^2 + D^2 \leq 1$, которое ограничивает сверху максимальные значения одновременно определенных параметров – интерференционной видности V и различимости пути (path distinguishability) D [Jacques et al., 2008]. Очевидно, случаи $V=1, D=0$ и $V=0, D=1$ являются предельными.

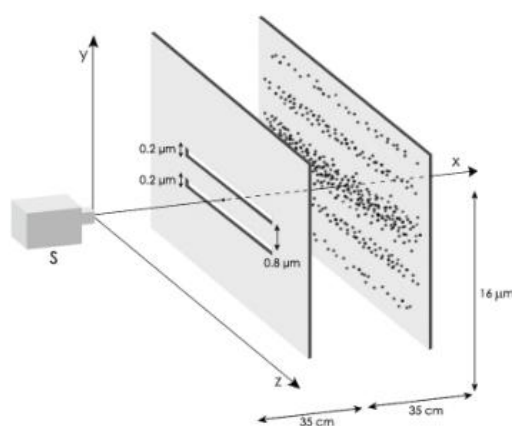
Различие между этими двумя подходами можно легко увидеть на примере интерпретации двухщелевого эксперимента, в котором пучок электронов низкой интенсивности (так, что электроны инжектируются поодиночке) направляется на непрозрачную поверхность с двумя щелями в ней. С другой стороны от этой поверхности на детектирующем экране регистрируются дискретные следы попадания электронов. Если даже считать, что следы на экране соответствуют частицам, они группируются в интерференционные полосы, характерные для волн. Таким образом, воспроизводится как волновое (интерференция), так и корпускулярное (точки на экране) поведение.

Согласно подходу Бома “Волна И частица” волновая функция (модуль которой дает плотность вероятности для электрона находиться в некоторой координате независимо от процесса измерения) проходит через ОБЕ щели. В то же самое время с электроном ассоциируется хорошо определенная траектория. Но эта траектория проходит только через ОДНУ из щелей. Финальное положение частицы на детектирующем экране и щель, через которую проходит частица, определяются начальным положением частицы. Такое начальное положение не контролируется экспериментатором, так что возникает эффект случайности детектируемого изображения. Волновая функция так управляет частицей, что разреживает следы частиц в области, где интерференция деструктивна, и сгущает в области, где интерференция конструктивна, порождая интерференционные полосы на детектирующем экране. По этому поводу Белл писал **[Bell, 1987]**: “Эта идея кажется мне настолько естественной и простой для разрешения дилеммы “волна - частица” столь ясным и прямым способом, что остается большой загадкой, почему она так долго игнорировалась.”

Двухщелевой эксперимент Юнга долго служил решающим экспериментом для интерпретации дуализма “волна-частица”. Этот простой эксперимент обладает двумя свойствами квантового феномена: волновой природой на микроскопическом уровне, связанной с феноменом интерференции волновой функции, и корпускулярной природой на микроскопическом уровне, связанной со следами соударений на экране. Двухщелевые интерференционные эксперименты были выполнены с такими массивными объектами, как электроны, нейтроны, холодные нейтроны, атомы, а также – недавно – с когерентными ансамблями ультрахолодных атомов и с мезоскопическими одиночными квантовыми объектами.



1a ([Philippidis et al., 1979])



1b [Gondran and Gondran, 2005]

Рис. 1. Конфигурация опыта с двумя щелями

Корректное численное моделирование двухщелевого эксперимента впервые было успешно осуществлено в работе [Philippidis et al., 1979], а затем – в работе [Gondran and Gondran, 2005]. Там квантовый потенциал был вычислен для обычной двухщелевой конфигурации, включающей источник электронов S_1 , две щели А и В и экран S_2 . В системе координат с началом в О, показанной на рис. 1а, центры щелей имеют координаты (0, Y) и (0, -Y).

Щели являются очень длинными вдоль оси z (нормальной к плоскости рисунка), так что вдоль этой оси нет эффекта дифракции. При моделировании поэтому рассматривали только волновую функцию вдоль оси y; переменная x классически интерпретировалась как $x=vt$. Электроны, испускаемые электронной пушкой, представлялись одной и той же начальной волновой функцией

$$\psi^0(y) = (2\pi\sigma_0^2)^{-1/4} \exp(-y^2 / 4\sigma_0^2)$$

со стандартным отклонением $\sigma_0 = 3$ мкм. Метод интегралов по путям Фейнмана позволяет вычислить зависимую от времени волновую функцию. Волновая функция *перед щелями* равна:

$$\psi(y, t) = [2\pi s_0^2(t)]^{-1/4} \exp[-(y - vt)^2 / 4s_0^2(t)],$$

где

$$s_0(t) = \sigma_0(1 + i\hbar t / 2m\sigma_0^2).$$

За щелями волновая функция выводится, исходя из значений волновых функций А и В:

$$\psi(y, t) = \psi_A(y, t) + \psi_B(y, t),$$

где

$$\psi_A(y, t) = \int_A \{ [m / 2i\hbar t_1]^2 \cdot \exp[(im(y - y_a)^2 / 2\hbar(t - t_1))] \cdot \psi(y_a, t_1) \cdot dy_a$$

и

$$\psi_B(y, t) = \int_B \{ [m / 2i\hbar t_1]^2 \cdot \exp[(im(y - y_b)^2 / 2\hbar(t - t_1))] \cdot \psi(y_b, t_1) \cdot dy_b$$

Амплитуды вероятности $\psi_A(y, t)$ и $\psi_B(y, t)$ находится интегрированием по всем координатам относительно щели. Вычисление волновой функции осуществлялось, используя метод интегралов по путям, с помощью которого квантовый потенциал может быть получен из приведенного ранее выражения для него.

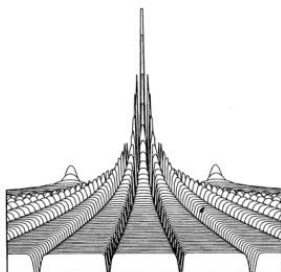


Рисунок 2. Квантовый потенциал для двух гауссовых щелей глядя с S_2 ([Philippidis et al., 1979])

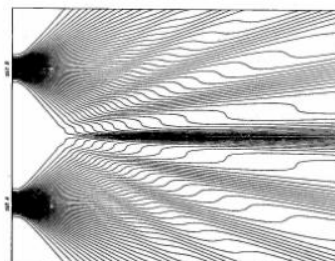


Рис. 3. Ансамбль траекторий, проходящих через две гауссовы щели ([Philippidis et al., 1979])

Траектории вычислены путем интегрирования по времени уравнения $\nabla S = mv$, которое связывает S -функцию со скоростью частиц обычным способом. Вначале траектории от каждой щели рассеиваются таким образом, что они совместимы с одиночной гауссовой щелью. Последовательные изломы траектории совпадают с “провалами” (throughs) в квантовом потенциале. Они возникают потому, что когда частица попадает в область провала, она испытывает значительную силу в направлении, которая быстро ускоряет частицу от провала к провалу в плоской области, где сила снова становится слабой. Как следствие, большинство траекторий располагаются вдоль плато и дают яркую интерференционную картину, когда провалы совпадают с темными полосами.

4. “Сюрреалистические” бомовские траектории

Интересная ситуация возникает [Englert et al., 1992], если рядом с каждой щелью поместить двоичный детектор, указывающий, прошла ли частица через данную щель, или нет. Эти детекторы сообщают нам информацию типа “который путь” и позволяют различить два класса траекторий – проходящих через одну щель и проходящих через другую щель. При этом, разумеется, утрачивается интерференционная картина на экране.

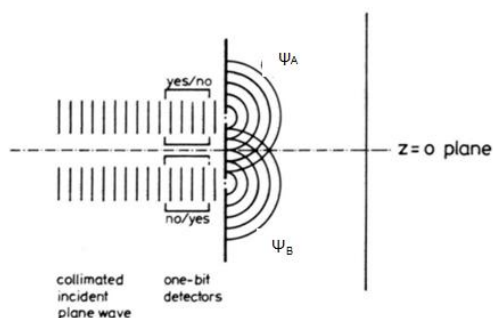


Рис. 4. Двухщелевой интерферометр с двоичными детекторами (“yes/no” one-bit detectors), через щели коллимированная плоская волна (collimated incident plane wave) падает на детектирующий экран. Из-за информации о выборе пути интерференция на экране исчезает.

При наличии таких двоичных детекторов волновая функция в зоне интерференции равна

$$\psi = \psi_A \left| \begin{smallmatrix} \partial a \\ \text{нет} \end{smallmatrix} \right\rangle + \psi_B \left| \begin{smallmatrix} \text{нет} \\ \partial a \end{smallmatrix} \right\rangle,$$

где вклад верхней щели теперь *коррелируется* с информацией “который путь”, зарегистрированной верхним детектором, и аналогично по отношению к нижней щели и нижнему детектору. В частности, члены, отвечающие за двухщелевую интерференцию, отсутствуют, как и должно быть.

Но через какую щель прошла частица? Предположим, что верхний детектор выдал “да”, а нижний – “нет”. Тогда вероятность обнаружить след частицы на экране пропорциональна $|\psi_A|^2$, но она не исчезает совсем на нижней половине экрана. Следовательно, возможен случай, когда частица *прошла* через верхний детектор и, значит, через *верхнюю* щель, а затем попала в нижнюю половину экрана, так что соответствующая *бомовская траектория проходит*

через нижнюю щель. Иными словами, в присутствии двоичных детекторов боровские траектории частицы могут характеризоваться противоречивым поведением: они могут начинаться в одной щели, тогда как показания детекторов говорят о том, что частица прошла через другую щель. Короче говоря, боровские траектории теперь не являются реалистическими, они “сюрреалистичны”.

В соответствии с этой теоретической моделью была выполнена экспериментальная работа [Mahler et al., 2016], в которой дается также теоретический анализ ситуации. Эксперимент производился с двумя запутанными фотонами и их траекториями, используя методологию “слабых” измерений. Показано, что траектории первой частицы (ее положение и скорость) действительно могут управляться второй частицей на расстоянии, т.е. *нелокально*.

Траектории одиночного фотона (частица 1) измеряются и пост-селектируются с помощью детектирования второго фотона, запутанного с первым (частица 2). С этой целью один из запутанных фотонов направляется в схему измерения параметров траектории, а второй фотон используется в качестве источника управляющего воздействия, открывающего или блокирующего попадание первого фотона в схему измерения.

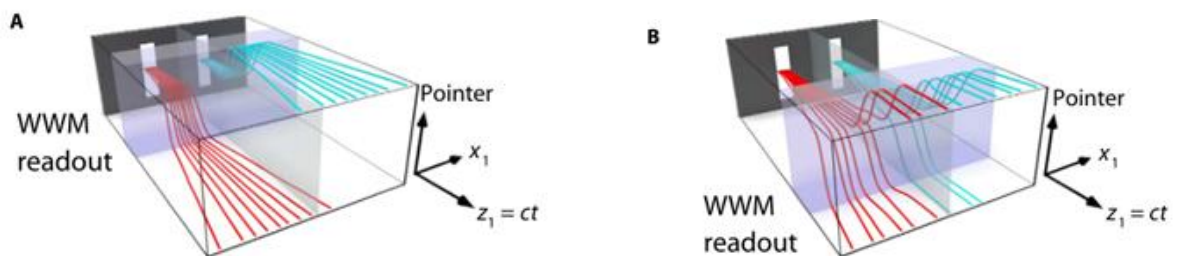


Рис 5. Боровские траектории в двухщелевом приборе.
(Из статьи [Mahler et al., 2016]).

Отсчет детектора информации о выборе пути (which way measurement – WWM) может регистрироваться по усмотрению экспериментатора в тот момент, когда частица 1 находится в ближней зоне (диаграмма А) или в средней зоне (диаграмма В) (см. рис. 5). При этом отсчет для частицы 2 не регистрируется до тех пор, пока частица 1 не попадет в нужную зону. Цветом на рис. 5 указана щель для исходной боровской траектории, а высота указывает результат WWM (положение x_2 второй, т.е. “контрольной”, частицы). Когда результат WWM регистрируется при нахождении частицы 1 в ближней зоне, боровские траектории идеально коррелируют со значением этого результата. Если же регистрация результата WWM производится при нахождении частицы 1 в средней зоне, боровские траектории коррелируют с результатом WWM только на краях диаграммы. Ближе к оси симметрии прибора равновероятны оба результата WWM независимо от той щели, в которой начинается боровская траектория.

5. Другие приложения теории Бома

В работе [Gondran and Gondran, 2013] ее авторы нашли аналитическое решение для волновой функции в эксперименте Штерна – Герлаха, где они рассчитали время декогеренции, и была выполнена диагонализация матрицы плотности. Это решение требует представления спинора Паули с пространственным разложением в виде

$$\Psi(z) = (2\pi\sigma_0^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{z^2}{4\sigma_0^2}\right) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

тогда как стандартные учебники по квантовой механике не учитывают пространственное разложение спинора и используют упрощенный спинор

$$\Psi(z) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

Авторы [Gondran and Gondran, 2013] показали, что различные эволюции пространственного разложения между двумя компонентами спинора играют ключевую роль при объяснении процесса измерения и позволяют переосмыслить эксперимент Штерна – Герлаха. Схема, положенная в основу численного моделирования, и его результаты, показаны на рис. 6.

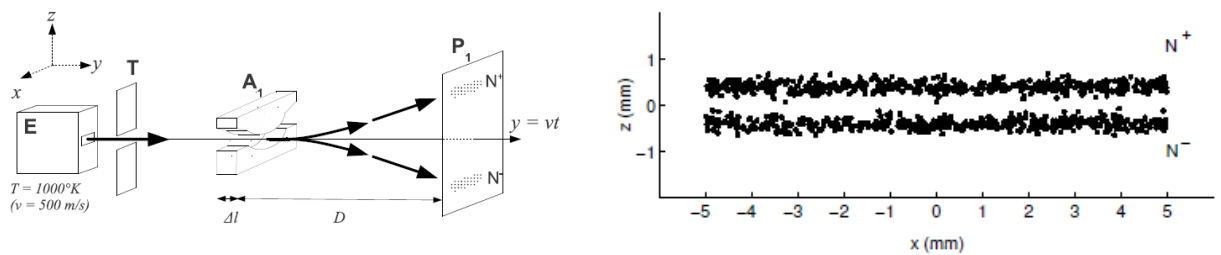


Схема эксперимента Штерна - Герлаха Расчетные следы 1000 атомов серебра на детекторе

Рис. 6

Кроме того, в той же работе исследуется боровская версия ЭПР-эксперимента. Предложена следующая причинная интерпретация ЭПРБ – эксперимента: как предполагают авторы, при рождении двух запутанных частиц А и В каждая из двух запутанных частиц обладает индивидуальной волновой начальной функцией с противоположными спинами. Тогда принцип Паули говорит нам, что эта волновая функция двух тел должна быть антисимметричной. Таким образом, можно считать, что синглетная волновая функция семейства из двух фермионов А и В с противоположными спинами, где направление начальных спинов существует, но *не известно*. Это не та интерпретация, которая поддерживается школой Бома при интерпретации синглетной волновой функцией; там не предполагается существование собственной различной функции для каждой частицы, следовательно, подразумевается нулевой спин для каждой частицы в начальный момент времени и модуль спина, варьирующийся во время эксперимента от 0 до $\hbar/2$. Напротив, авторы этой работы предполагают, что в начальный момент времени спин каждой частицы (задаваемый каждой начальной волновой функцией) и начальное положение каждой частицы известны.

Концепция де Бройля – Бома может быть применена не только к частицам с ненулевой массой, но и в физике электромагнитного излучения, физике других волновых процессов (например, акустических). Например, в работе [Sanz, 2012] было рассмотрено прохождение светового импульса по волноводу с малым углом или в параксиальном приближении. Предположив, что оптическая ось

ориентирована вдоль оси z , и что электромагнитное поле, проходящее через волновод, является гармоническим во времени, мы можем аппроксимировать это поле плоской волной вдоль z -направления, модулированной определенной комплексно-значной амплитудой

$$\Psi(r) = \psi(r) \exp(ik_z z)$$

где $k_z = n_0 k$, $k = 2\pi / \lambda$, λ - длина световой волны в вакуум, r – объемный коэффициент преломления. Подставив это выражение в уравнение Гельмгольца, мы приходим к уравнению, изоморфному уравнению Шрёдингера, где z (а не время t) играет роль параметра эволюции. Последнее уравнение использовалось, например, при разработке волновода с оптимальными условиями распространения света.

Заметим, что результаты всех этих расчетов полностью соответствуют предсказаниям стандартной квантовой механики.

6. Теория Бом и проблема измерения

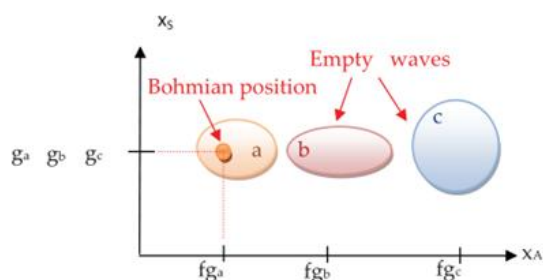
Еще в работе [V. Neumann., 1932] фон Неймана было обращено специальное внимание на принципиальное различие между “собственной” эволюцией квантовой системы (описываемой обратимым во времени уравнением Шрёдингера) и “редукционной” эволюцией. Последняя обычно имеет необратимый характер и происходит при измерении состояния частицы. Измерительная процедура приводит к коллапсу волновой функции, когда суперпозиция возможных состояний мгновенно, как принято думать, заменяется одним и только одним из состояний суперпозиции, в которой система пребывает до измерения. Фон Нейман назвал такое измерение “проективным”, поскольку исходный вектор состояния в гильбертовом пространстве мгновенно трансформируется (“редуцируется”, или “коллапсирует”) в одну из своих базисных компонент в этом пространстве. Это означает, что начальная (до измерения) волновая функция заменяется одним из *собственных состояний* конкретного проекционного оператора $\hat{G}$. В отличие от детерминистического закона эволюции волновой функции, задаваемого уравнением Шрёдингера, коллапс не является детерминистическим, поскольку финальная волновая функция выбирается случайно среди собственных состояний оператора $\hat{G}$. Такое описание напоминает некий “трюк” [Dürr et al., 2004], а главное – произвольно “изолирует” измеряемую квантовую систему от остального мира.

Бом предложил совершенно другой подход к проблеме измерения, который в значительной степени сходен с современным. В теории Бом измерительный процесс интерпретируется как любой другой процесс взаимодействия частиц, так что выше описанные трудности ортоксальной интерпретации просто исчезают, в частности – исчезает необходимость введения проекционных операторов. Здесь вся квантовая система описывается траекторией плюс волновой функцией (а не одной только волновой функцией). Волновая функция и траектория обе ассоциируются с системой *в целом*, т.е. с измеряемой квантовой системой плюс измерительный прибор. Для такой составной системы в общем уравнении Шрёдингера в течение процесса измерения в гамильтониане появляется слагаемое, описывающее взаимодействие, так что уравнение Шрёдингера остается справедливым как во время измерения, так и после прекращения взаимодействия. Именно это слагаемое вводит связь между состоянием системы и измерительного прибора, давая тем самым возможность осуществить

измерение. В то же время при измерении происходят изменения в состоянии измеряемой системы и измерительного прибора – их степени свободы, взаимно независимые до измерения, после измерения оказываются скоррелированными (запутанными) между собой. Как указывал Бом, при выполнении измерения важно, чтобы связь между системой и прибором была достаточно сильной, а само взаимодействие должно продолжаться определенный минимальный интервал времени, но не настолько долго, чтобы вызвать искажения (он в книге **[Bohm, 1951]** приводит в виде примера слишком короткую и слишком длинную экспозиции при фотосъемке).

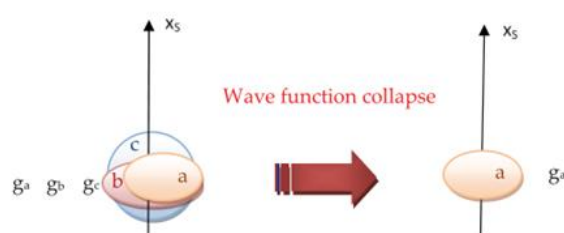
Хорошими примерами измерения могут служить описанные выше двухщелевой эксперимент (непрерывный спектр возможных траекторий) и эксперимент Штерна Герлаха (дискретный спектр возможных траекторий). Согласно представлениям Бом (в отличие от ортодоксальной квантовой теории), благодаря влиянию нелокального скрытого параметра (фазы волновой функции) частица выбирает определенную траекторию (одну из возможных в соответствии с уравнением Шрёдингера). При выполнении эксперимента общая волновая функция, отвечающая суперпозиции потенциально возможных состояний, расщепляется на волновые пакеты по числу таких траекторий, причем расстояние между центрами пакетов быстро увеличивается, так что очень скоро они перестают перекрываться в пространстве. В итоге одному из пакетов соответствует бомовская траектория, тогда как все остальные оказываются “пустыми” (рис. 7).

(a) Bohmian measurement explanation in $[x_S, x_A]$ space



Бомовское объяснение измерения в пространстве $[x_S, x_A]$ (система – прибор): Из неперекрывающейся волновой функции только часть g_a волновой функции, где представлена траектория, требуется для вычисления эволюции бомовской системы (bohmian position – бомовская координата, empty waves – “пустые волны”).

(b) Orthodox measurement explanation in $[x_S]$ space



Ортодоксальное объяснение измерения в пространстве $[x_S]$ (система): волновая функция (системы) коллапсирует в часть g_a , когда осуществляется измерение (wave function collapse – коллапс волновой функции).

Рис. 7 (из **[Oriols and Mompert, 2012]**)

С современной точки зрения расщепление общей волновой функции на отдельные пакеты называется декогеренцией. В процессе измерения участвуют собственно измеряемая система S плюс измеряющий прибор (или окружение) ε **[Менский, 2001]**.

Перед измерением система S характеризуется вектором (чистого) состояния, а также матрицей плотности, отвечающей этому состоянию. Члены, стоящие на главной диагонали матрицы, дают вероятности получения каждого из возможных

(базисных) результатов измерения, а члены, расположенные вне главной диагонали, соответствуют корреляциям (фазовым соотношениям) между базисными состояниями. Аналогичным образом описывается окружение ε .

При взаимодействии системы S с окружением ε (т.е. при измерении) происходит запутывание степеней свободы S и ε . Описывающая их общая волновая функция, которая до измерения могла быть разложена (факторизована) на два сомножителя, по отдельности отвечавших S и ε , утрачивает это свойство, т.к. возникает корреляция между степенями свободы S и ε , которой до измерения не было. Иначе говоря, каждая часть составной системы (S и ε) на этом этапе уже не может быть описана отдельным вектором состояния, а только матрицей плотности.

Завершающий этап сводится к процессу декогеренции. Процесс характеризуется очень быстрым разрушением фазовых соотношений между отдельными состояниями, происходит ослабление элементов матрицы плотности вне главной диагонали (коэффициентов корреляции), тогда как элементы на главной диагонали (вероятности базисных состояний) существенно не изменяются. В конечном счете измеряемая система переходит из чистого состояния (суперпозиция) в (статистическую) смесь возможных результатов измерений, что соответствует проекционному оператору фон Неймана.

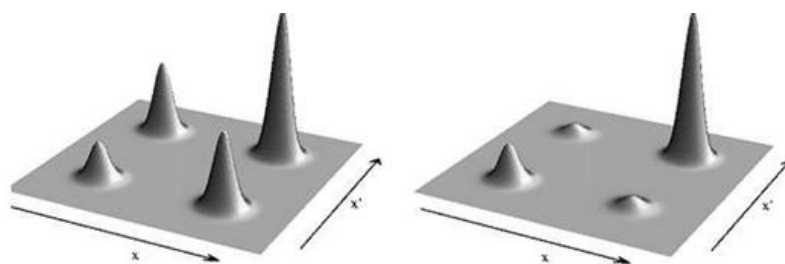


Рис.8 [Kiefer and Joos, 1998]

Макроскопические объекты всегда кажутся локализованными в пространстве. Когерентность между макроскопически различными положениями разрушается исключительно быстро вследствие сильного влияния процессов рассеяния. Вклады множества процессов рассеяния дают экспоненциальное демпфирование пространственной когерентности. Сила этого эффекта описывается параметром Λ [Kiefer and Joos, 1998]. Некоторые значения приведены ниже в таблице.

Таблица 1

Темп локализации Λ [$\text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$] для трех размеров частиц “а”. Эти величины показывают, как быстро исчезает интерференция между различными состояниями в зависимости от расстояния с течением времени в различных средах, где происходят процессы рассеяния

	“Пылевидные” частицы		Большие молекулы
	$a=10^{-3}$ см	$a=10^{-5}$ см	$a=10^{-6}$ см
Фоновое космическое излучение	10^6	10^6	10^{-12}
Фотоны 300 К	10^{19}	10^{12}	10^6
Солнечный свет (на Земле)	10^{21}	10^{17}	10^{13}
Молекулы воздуха	10^{36}	10^{32}	10^{30}
Лабораторный вакуум (10^3 частиц в см^3)	10^{23}	10^{19}	10^{17}

7. Скрытые параметры фон Неймана, возражения Бома и Белла

Бом интерпретировал полученные им соотношения в том смысле, что они в принципе означают *опровержение квантового индетерминизма*. Если бы нам было известно значение фазы S , то мы могли бы, как он считал, определить “индивидуальные” скорости частиц $\vec{v}_i$ и, с помощью дальнейшего интегрирования по времени при заданных начальных значениях, “индивидуальные” *траектории* частиц. Здесь возникает по меньшей мере два фундаментальных вопроса:

- Как быть с известной “теоремой фон Неймана о скрытых параметрах”, ограничивающей детерминизм поведения отдельных квантовых частиц?
- Правильно ли вообще в данном случае говорить об “индивидуальных” характеристиках частиц?

Но можно ли согласовать вновь выведенные принципы квантовой механики с детерминистическим, а не вероятностным описанием квантовых объектов? В знаменитом труде Джона фон Неймана был приведен результат, полученный ранее Робертсоном [Robertson, 1929] и названный затем “теоремой фон Неймана о скрытых параметрах”. Как утверждает эта теорема, из основных принципов квантовой теории следует, что она (эта теория) может давать только вероятностное, но не детерминистическое квантовых объектов. Поскольку эта теорема в дальнейшем многократно подвергалась критике, дадим ее точную формулировку. Пусть двум квантовым наблюдаемым величинам A и B соответствуют два *некоммутирующих* самосопряженных эрмитовых оператора $\hat{A}$ и $\hat{B}$, причем $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = i\hat{C}$. Тогда может быть строго доказано *соотношение неопределенностей Гейзенберга*:

$$\sqrt{(\Delta A)^2 \cdot (\Delta B)^2} \geq \frac{1}{2} |\overline{C}|,$$

где ΔA и ΔB - среднеквадратичные (принципиально неустранимые) отклонения индивидуальных результатов измерения A и B от их средних значений. Иными словами, коль скоро для описания квантовых явлений необходимы (в том числе) некоммутирующие операторы, то использующая их теория не может быть детерминистической.

Сам Бом, не оспаривая математическую корректность формального аппарата квантовой теории, настаивал на том, что это описание соответствует не окончательному, а лишь промежуточному уровню представления реальности. Логика Бома состояла в следующем утверждении: да, статистическая интерпретация квантовой механики (допускающая использование некоммутирующих операторов) внутренне непротиворечива и подтверждается экспериментами. Для такой теории “скрытые” (детерминистические) параметры действительно не нужны и излишни. Но означает ли это, что невозможен более глубокий уровень описания, также внутренне непротиворечивый и допускающий экспериментальное подтверждение? В качестве возможной иллюстрации Бом приводит сопоставление феноменологической термодинамики (в которой фигурируют макроскопические параметры – давления, температуры и т.п.) со статистической физикой, в которой *макроскопические* параметры не постулируются, а возникают как результат действия ансамбля *микроскопических* степеней свободы отдельных атомов и молекул. Как известно, между

сторонниками этих концепций в свое время шла упорная идеологическая борьба; победил же именно микроскопический подход.

Можно привести и другую аналогию, более близкую, с нашей точки зрения, к тезису Бома. Рассмотрим линейную электрическую цепь со стационарными гармоническими токами и напряжениями. Здесь можно выделить два уровня анализа. На “тонком” уровне можно оперировать мгновенными значениями токов и напряжений (и измерять их), это как раз то, что имеет в виду Бом. На “грубом” уровне мы должны говорить только о “действующих” (RMS — root mean square) значениях токов и напряжений, которые в каждой ветви (квадратично) усреднены за период гармонического тока, а также о фазовых углах между ними; в этом случае мы имеем прагматическую и абсолютно непротиворечивую и полную теорию стационарных гармонических процессов, которая, однако, потенциально может быть расширена до “тонкого” уровня. Более того, в такой теории также используются комплексные величины, что приводит к ряду удивительных аналогий (включая коммутационные соотношения) с квантовой механикой [Шульман, 2004].

К возражениям против универсальной справедливости теоремы фон Неймана присоединился и Джон Белл [Bell, 1987]. В главе “Невозможная волна-пилот” он привел конструктивную критику предпосылок этой теоремы и сослался на модель предложенную Бомом, которая выходила за рамки подобных предпосылок и, в частности, вводила параметр фазы, явно служащий примером “скрытого параметра” фон Неймана. “Я увидел невозможное осуществленным.” Так Джон Белл описывал свое невыразимое удивление в 1952 году по поводу публикации статьи Дэвида Бома. В своей книге Белл удивляется молчанию своих учителей по поводу теории волны-пилота де Бройля – Бома:

“Но почему тогда Борн не говорил мне об этой ‘волне-пилоте’? Хотя бы не указал на то, что было в ней неправильно? Почему эту теорию не рассматривал фон Нейман? Более того, почему люди приводят доказательства ‘невозможности’ после 1952 года и даже в 1978 году? Даже Паули, Розенфельд и Гейзенберг не смогли критиковать бомовскую версию более содержательно, чем обозвав ее ‘метафизической’ и ‘идеологической’. Почему представление о ‘волне-пилоте’ игнорируется в учебниках? Не следует ли думать об этом если не как о единственно правильном пути, то хотя бы как о лекарстве против самоуспокоенности? Чтобы показать, что неопределенность, субъективность и индетерминизм не возникают для нас из экспериментальных данных, но только из свободного теоретического выбора.” [Bell, 1987]

Поэтому Белл подошел к анализу ситуации с другой стороны. Рассматривая в [Bell, 1964] мысленный опыт, связанный с известным парадоксом Эйнштейна – Подольского – Розена (где речь идет о разлете запутанных квантовых частиц), Белл попытался выяснить, можно ли описать результаты квантовой теории и соответствующих экспериментов с помощью *детерминистических скрытых параметров*. Оказалось, что этого сделать нельзя в принципе, если только не допустить, что между разлетающимися ЭПР-частицами (и/или детекторами этих частиц) возможны *нелокальные* (сверхсветовые) взаимодействия. Как формально доказал Белл в 1960-х [Bell, 1964], а позднее экспериментально проверил Аспе с сотрудниками в 1980-х, квантовая механика (а теория Бома – явном виде через квантовый потенциал) характеризуется именно *нелокальными* корреляциями (запутыванием) [Aspect, 2000].

8. Являются ли скорости и траектории в модели Бомы характеристиками индивидуальных частиц?

На самом деле непосредственная интерпретация Бомы оказалась уязвимой совсем с другой стороны. Являются ли найденные им скорости и точки траектории мгновенными характеристиками именно *индивидуальных* частиц? Сам Бом был в этом убежден и даже не пытался ставить вопрос как-то иначе, однако имеются аргументы в пользу другой точки зрения.

Во-первых, само уравнение Шрёдингера, которое было для Бомы отправным, оперирует со *статистическим* ансамблем, имеющим то или иное распределение. Отсюда, по нашему мнению, следует, что любое полученное из уравнения Шрёдингера описание также будет иметь статистический характер. Это в полной мере должно относиться к таким объектам, как бомовские скорости и бомовские траектории.

Во-вторых, исходя из аналогии с “квантовой жидкостью”, подчиняющейся тем же уравнениям Бомы, было показано, что “линии течения квантовых потоков не могут пересекаться в конфигурационном пространстве $\langle \dots \rangle$. Следовательно, две или более бомовские траектории не могут пересекаться в одной и той же точке в данный момент времени $\langle \dots \rangle$ ”. [Sanz, 2012]. В то же время теоретически и экспериментально показано (как было отмечено выше), что отдельные квантовые частицы с отличной от нуля вероятностью могут “перескакивать” с одной бомовской траектории на другую, образуя так называемые “сюрреалистические” траектории [Englert et al., 1992]. Следовательно, “групповые” бомовские траектории и “индивидуальные” треки следования частиц – это совсем не одно и то же, что и было продемонстрировано на примере “сюрреалистических” траекторий.

Действительно, в 1926 году Маделунг увидел [Jammer, 1967], что из уравнения Шрёдингера, зависящего от времени, следует уравнение, имеющее форму гидродинамического уравнения непрерывности, в котором фигурируют плотность и потенциал скоростей движущейся жидкости. Развивая эти идеи, Маделунг показал, что каждая собственная функция (решение волнового уравнения) хотя и зависит от времени, но может интерпретироваться как некоторый тип стационарного течения. Поскольку гидродинамическая модель описывала также и другие важные черты теории Шрёдингера, Маделунг предположил, что существует возможность рассматривать квантовую теорию атомов с этой точки зрения. Если уравнения Бомы понимаются как уравнения гидродинамики, то траектории, полученные из уравнений, не обязательно могут (должны) рассматриваться как траектории реальных частиц, но скорее как *линии потока, ассоциированного с квантовой жидкостью* (действительно, заметим, что уравнение Шрёдингера обычно описывает не “истинную” частицу, а степень свободы).

“Тогда немедленно возникает вопрос, что собой представляет траектория по Бому. Является ли она реальным путем, по которому следует квантовая частица, или просто отражает квантовую степень свободы? ...

Рассмотрим (классическую) сплошную среду. Она состоит из многих различных частиц (атомов, ионов, молекул и т.д.), все степени свободы описываются набором связанных дифференциальных уравнений, причем число уравнений совпадает с числом степеней свободы. Пусть нас интересует не микроскопическое описание среды, а лишь макроскопическое описание с помощью уравнения типа уравнения Эйлера или Навье - Стокса, которое феноменологически описывает эволюцию сплошной среды, не

уделяя внимания микроскопической динамике ее составляющих. Именно на этом построены основы гидродинамики. В таком случае для экспериментального изучения поведения среды обычно следят за движением некоторых частиц, а именно частиц-маркеров, которые позволяют визуализировать динамику потока при движении вдоль линий его течения, совпадающим с линиями переноса энергии. Например, если мы хотим наблюдать эволюцию потока воздуха, то можем следить за распространением дыма сигареты; для слежения за потоком воды можно использовать другую жидкость типа чернил или мелкие плавающие частицы типа пыльцы или крошки древесного угля. На космологических масштабах такой гидродинамический подход также может быть использован благодаря использованию в качестве частиц-маркеров звезд, галактик или их скоплений. ... Реальные отдельные квантовые частицы ведут себя как корпускулы, хотя их распределение обнаруживает волновые свойства согласно уравнению Шрёдингера или его боровским эквивалентам. Следовательно, очевидно, что свойства ансамбля требуется описывать коллективно, т.е. функцией плотности распределения, роль которой выполняет плотность вероятности в квантовой механике или, на более элементарном уровне, волновая функция. Это соответствует *статистической интерпретации Борна* для квантовой механики.

9. Модель Гроссинга

Вспомним приведенную в начале нашего обзора цитату из [Jammer, 1967]: “Увидев, что [это] уравнение подобно уравнению с мнимым коэффициентом диффузии, Шрёдингер ослабил свое первоначальное требование о вещественности ψ и допустил возможность комплексных значений для механического полевого скаляра ψ ...”. В ней встречаются два ключевых слова – “диффузия” и “комплексность”. К этим двум понятиям в ряде своих работ обращается австрийский теоретик Герхард Гроссинг, выстраивая так называемую “эмерджентную квантовую механику”. Под этим термином Гроссинг понимает квантовую механику, *возникающую на суб-квантовом уровне* из классических по своей сути представлений.

В работе [Grössing, 2008] он предлагает следующую модель, описывающую распространение квантовой частицы в среде “нулевых колебаний” вакуума. Энергия этой квантовой частицы считается состоящей из двух составляющих. Первая из них – это обычная (постоянная) энергия квантового осциллятора (пропорциональная частоте колебаний), а вторая – это *дополнительная кинетическая компонента, обусловленная флуктуирующим (гармонически изменяющимся) импульсом частицы*, который непрерывно приобретает и теряет за обмена энергией с вакуумом. В результате движение частицы приобретает осмотический (броуновский) характер. Полагая кинетическую энергию “вакуумного термостата” в расчете на одну степень свободы равной $kT/2$, а среднюю кинетическую энергию частицы-осциллятора – равной $\hbar\omega/2$, затем приравнявая их, вводя вероятность для частицы и выражая ее обычным образом через действительную амплитуду и фазу волновой функции, Гроссинг получает (макроскопическое) уравнение *диффузии*, в точности совпадающее с уравнениями Боме, где автоматически возникает вышеупомянутый специфический квантовый потенциал. Для единственной свободной частицы этот потенциал не оказывает существенного влияния, однако при наличии нескольких частиц для диффузионных полей сразу следует новое понимание основных свойств квантового потенциала.

Важную роль при этом играет собственная частота ω частицы, которая (насколько можно предполагать – МХШ), резонирует во всем объеме с частотой вакуумных колебаний². Именно вследствие этого возникают *диффузионные* волны, свойства которых радикально отличаются от обычных (“бегущих”) волн, отвечающих уравнению гиперболического типа. В частности, следует обратить внимание на *нелокальные свойства диффузионных волн*. Так как “скорость их распространения” не ограничена, исходное уравнение не приводит ни к бегущим волнам, ни к волновым фронтам, ни к фазовой скорости. Скорее, целая область как бы “дышит” в фазе с осциллирующим источником. В мире диффузионных волн существуют только пространственно коррелированные фазовые лаги, определяемые диффузионной длиной.

Таким образом, вместо привычного анализа поведения одиночной квантовой частицы (фотона, электрона) самой по себе, мы приходим к необходимости рассматривать ее “диффузионное” распространение в среде, состоящей из нулевых колебаний вакуума. И на самом деле эта мысль не столь неожиданна, как могло бы показаться. В теории декогеренции активно используются представления о взаимодействии квантовой частицы со средой, когда эта среда “измеряет” частицу и запутывается с ней. Например,

“... видный отечественный теоретик Д. И. Блохинцев считал, что особенности квантовой механики проистекают из-за невозможности изолировать частицу от окружающего мира. При любой температуре выше абсолютного нуля тела излучают и поглощают электромагнитные волны. С позиций квантовой механики это означает, что их положение непрерывно «измеряется», вызывая коллапс волновых функций. «С этой точки зрения никаких изолированных, предоставленных самим себе «свободных» частиц не существует, — писал Блохинцев. — Возможно, что в этой связи частиц и среды и скрывается природа той невозможности изолировать частицу, которая проявляется в аппарате квантовой механики».” [Шишлова, 1998]

Современная физика уже вплотную, на количественном уровне занимается теоретическими моделями декогеренции (и их экспериментальной проверкой). В частности,

“пригодная для анализа модель представляет собой набор гармонических осцилляторов ... или, что эквивалентно, квантовое поле... Присутствие частицы приводит к возбуждению поля и ее рассеянию. Результирующая рябь создает своего рода запись ее положения, формы, ориентации и т.п., и, что наиболее важно, приводит к ее мгновенной локализации и, следовательно, появлению траектории. Возникает своего рода такой же след, как на водной поверхности вслед за кораблем, плывущим по озеру, или за камнем, брошенным в воду. Мы переносим этот образ на возмущение некоторыми объектами существующего электромагнитного поля...” [Zurek, 2002].

² Ср. с постоянством (для всего объема жидкости в экспериментальном поддоне) частоты вибрации (т.е. подпитки энергией) в макроскопических опытах группы Кудэ [Couder et al., 2010] с “блуждающими капельками”, получившими широкую известность в связи с сильной аналогией между ними и основными квантовыми эффектами движения. В частности, возникающие там волны также имеют диффузионный характер.

10. Заключение

Подведем некоторые итоги.

Прежде всего, отметим, что формально Бом не расширил сам аппарат квантовой механики. Он “просто” предложил заменить уравнение Шрёдингера для одной *комплекснозначной* волновой функции эквивалентной системой двух уравнений для двух *действительных* функций – амплитуды и фазы волновой функции.

С другой стороны, такое представление математического аппарата КМ позволило посмотреть на квантовую теорию с новых позиций:

- До Бома, насколько можно судить, “абсолютную” фазу волновой функции считали формальным параметром, не имеющим физического смысла. В новом представлении на смену уравнению Шрёдингера пришли известные из классической физики уравнение непрерывности (для плотности вероятности) и уравнение Гамильтона – Якоби, позволяющее фиксировать фазу волновой функции для отдельной траектории (или группы траекторий). В квантовом аналоге уравнения Гамильтона – Якоби появилось новое слагаемое – квантовый потенциал, которое отсутствовало в классическом уравнении и обусловило в явном виде *нелокальные* корреляции квантовых частиц.
- Бом интерпретировал отдельные траектории, фиксируемые определенным значением фазы волновой функции, как треки движения индивидуальных квантовых частиц. Однако теоретические аргументы и экспериментальные факты позволяют думать, что речь идет, скорее, о классах траекторий, усредненных по данному значению фазы, тогда как понятие траектории индивидуальной частицы является весьма спорным. Теория Бома говорит, по-видимому, не об отдельных частицах и их траекториях, а о линиях переноса массы/энергии.
- Бом привел ряд аргументов, опровергающих универсальную справедливость теоремы фон Неймана о скрытых параметрах. Введенная им “абсолютная” фаза волновой функции является хорошим примером (нелокального) скрытого параметра.
- Бом высказывал твердую уверенность в том, что хотя квантовая механика является полной и непротиворечивой теорией, возможны иные физические теории, также полные и непротиворечивые, но работающие на более тонком уровне представлений о пространстве, времени и физических взаимодействиях.

Ссылки

[Aspect, 2000] A. Aspect. Bell's theorem: the naive view of an experimentalist. The text prepared for a talk at a conference in memory of John Bell, held in Vienna in December 2000. It has been published in “Quantum [Un]speakables – From Bell to Quantum information”, edited by R. A. Bertlmann and A. Zeilinger, Springer (2002). <http://arXiv.org/abs/quant-ph/0402001>

[Bell, 1964] J. S. Bell, On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox, Physics 1, 195 (1964).

[Belinsky and Shulman, 2017b] A.V. Belinsky, M.S. Chulman. A possible origin of quantum correlations. Journal of Russian Laser Research, Volume 38, Number 3, May, 2017

- [Bell, 1987] J. S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, 1987), 2nd edition, 2004.
- [Bohm, 1951] D. Bohm, *Quantum Theory* (Dover Publications, New York, 1951).
- [Bohm, 1952] D. Bohm, A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. I, *Phys. Rev.* 85, 166-179(1952); A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. II, *Phys. Rev.* 85, 180-193 (1952).
- [Couder et al., 2010] Y. Couder et al. Walking droplets, a form of wave-particle duality at macroscopic scale? *Europhysics News* Vol. 41, No. 1, 2010, pp. 14-18.
Русский перевод: Кудэ и др. Блуждающие капельки. Разновидность корпускулярно-волнового дуализма в макром мире?
http://www.timeorigin21.narod.ru/rus_translation/Walking_droplets.pdf
- [Davidović and Sanz, 2014] M. Davidović and A.S. Sanz. How does light move? Determining the flow of light without destroying interference. *ArXiv*: 1403.1084
- [de Broglie, 1923] Louis de Broglie. Ondes et quanta. *Compt. Rend.*, 179, 507-510 (1923)
- [Dürr et al., 2004] D. Dürr, S. Goldstein and N. Zanghi, Quantum Equilibrium and the Role of Operators as Observables in Quantum Theory, *Journal of Statistical Physics*, 116, 9595 (2004).
- [Englert et al., 1992] Berthold-Georg Englert, Marian O. Scully, Georg Süssmann, and Herbert Walther. Surrealistic Böhm Trajectories. *Z. Naturforsch.* 47a, 1175-1186 (1992);
- [Gondran and Gondran, 2005] M. Gondran, A. Gondran, "Numerical simulation of the double-slit interference with ultracold atoms", *Am. J. Phys.* 73, 6 (2005).
- [Gondran and Gondran, 2013] Michel Gondran, Alexandre Gondran. Measurement in the de Broglie-Bohm interpretation: Double-slit, Stern-Gerlach and EPRB. *ArXiv*: 1309.4757v1 [quant-ph] 18 Sep 2013.
Русский перевод: Измерения в интерпретации деБройля – Бома. Опыт с двумя щелями, опыт Штерна – Герлаха и ЭПРБ-эксперимент.
http://www.timeorigin21.narod.ru/rus_translation/1309_4757_Gondrans.pdf
- [Grössing, 2008] Gerhard Grössing. On the Thermodynamic Origin of the Quantum Potential. [arXiv:0808.3539v1](http://arxiv.org/abs/0808.3539v1) [quant-ph]. Реферат на русском языке: Герхард Гроссинг. О термодинамической природе квантового потенциала.
http://www.timeorigin21.narod.ru/rus_translation/Bom_thermodynamics.pdf
- [Jacques et al., 2008] Vincent Jacques, E Wu, Frederic Grosshans, Francois Treussart, Philippe Grangier, Alain Aspect and Jean-Francois Roch. Delayed-choice test of complementarity with single photons. *Physical Review Letters*, American Physical Society, 2008, 100 (22), pp.220402.
- [Jammer, 1967] Max Jammer. *The conceptual development of quantum mechanics*. McGraw-Hill book Company. New York, St. Louis. San Francisco, Toronto, London, Sydney 1967. Русский перевод: Макс Джеммер. Эволюция понятий квантовой механики. Москва, "Наука", 1985
- [Kiefer and Joos, 1998]. Claus Kiefer and Erich Joos. Decoherence: Concepts and Examples. <https://arxiv.org/pdf/quant-ph/9803052.pdf>
- [Mahler et al., 2016] Dylan H. Mahler, Lee Rozema, Kent Fisher, Lydia Vermeyden, Kevin J. Resch, Howard M. Wiseman, Aephraim Steinberg. Experimental nonlocal and surreal Bohmian trajectories. *Sci. Adv.* 2016;2:e1501466 19 February 2016
- [Oriols and Mompert, 2012] X. Oriols and J. Mompert "Overview of Bohmian Mechanics"; pages: 15-147; Chapter 1 of the book "Applied Bohmian Mechanics: From Nanoscale Systems to Cosmology" Editorial Pan Stanford Publishing Pte. Ltd (2012).
- [Philippidis et al., 1979] Quantum Interference and the Quantum Potential. C. Philippidis, C. Dewdney and B. J. Hiley. *Nuovo Cimento*, 52B (1979) 15-28.
- [Robertson, 1929] H.P. Robertson. The uncertainty principle. *Phys. Rev.*, 1929, 34, p. 163-164.

[Sanz and Miret-Artés, 2011] A. S. Sanz and S. Miret-Artés. Analyzing the quantum phase with quantum trajectories: A step towards the creation of a Bohmian thinking. ArXiv:1104.1296v1 [quant-ph] 7 Apr 2011.

Русский перевод: А. Санц и С. Мире-Артес. Анализ квантовой фазы для квантовых траекторий. Шаг к рождению бомовского мышления.

http://www.timeorigin21.narod.ru/rus_translation/1104_1296v1_Phase_and_trajectory.pdf

[Sanz, 2012] Ángel S. Sanz. Quantumness beyond quantum mechanics. ArXiv:1202.5181v1 [quant-ph] 23 Feb 2012.

Русский перевод: Анхел Санц. Кванты за пределами квантовой механики.

http://www.timeorigin21.narod.ru/rus_translation/1202_5181_Beyond_QM.pdf

[Sanz, 2014] Ángel S. Sanz. Particles, waves and trajectories: 210 years after Young's experiment. ArXiv:1402.3877v1 [quant-ph] 17 Feb 2014.

[Schrödinger, 1926] E. Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem (I), Annalen der Physik, 1926, Bd 79, S. 361-376. Рус. перевод: Э. Шрёдингер.

Квантование как задача о собственных значениях. В кн. "Избранные труды", с. 9 – 51. М., "Наука", 1976

[Styer et al., 2002] Daniel F. Styer, Miranda S. Balkin, Kathryn M. Becker, Matthew R. Burns, Christopher E. Dudley, Scott T. Forth, Jeremy S. Gaumer, Mark A. Kramer, David C. Oertel, Leonard H. Park, Marie T. Rinkoski, Clait T. Smith, and Timothy D. Wotherspoon. Nine formulations of quantum mechanics. Am. J. Phys. 70 (3), March 2002. DOI: 10.1119/1.1445404 <http://ojps.aip.org/ajp/>

Русский перевод: Стайер и др. Девять формулировок квантовой механики.

http://timeorigin21.narod.ru/rus_translation/QM_formulations.pdf

[V. Neumann., 1932] J. von Neumann. Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Verlag von Julius Springer. 1932, Berlin. Рус. перевод: Й. фон Нейман. Математические основы квантовой механики. М., "Наука", 1964.

[Zurek, 2002] Wojciech H. Zurek. Decoherence and the Transition from Quantum to Classical—Revisited. Los Alamos Science, Number 27, 2002.

Русский перевод: Войцех Журеке. Декогеренция и переход от квантового мира к классическому. http://www.timeorigin21.narod.ru/rus_translation/Zurek.pdf

[Белинский и Шульман, 2017а] А.В. Белинский, М.Х. Шульман. Об относительности нелокальности для фотонных корреляций. Пространство, время и фундаментальные взаимодействия 2017, вып.1.

[Менский, 2001] М.Б. Менский. Квантовые измерения и декогеренция. Модели и феноменология. М., ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 232 с.

[Шишлова, 1998] А. Шишлова. Квантовая механика. Иной взгляд (концепция Д.Боме). По материалам журналов "Успехи физических наук" и "Scientific american". "Наука и жизнь" № 8, 1998.

[Шульман, 2004] Шульман М.Х. Вариации на темы квантовой теории. Москва, Едиториал УРСС, 2004. Доступно по ссылке:

http://timeorigin21.narod.ru/rus_quantum/Variations.pdf

[Englert et al., 1992] Berthold-Georg Englert, Marian O. Scully, Georg Süssmann, and Herbert Walther. Surrealistic Böhm Trajectories. Z. Naturforsch. 47a, 1175-1186 (1992)