Как результат измерения компоненты спина у частицы со спином 1/2 может дать значение спина, равное 100

Я. Ааронов, Д. Альберт и Л. Вайдман (Израиль)

Перевод М.Х. Шульмана (shulman@dol.ru, www.timeorigin21.narod.ru)

VOLUME 60, NUMBER 14 PHYSICAL REVIEW LETTERS 4 APRIL 1988

How the Result of a Measurement of a Component of the Spin of a Spin-$\frac{1}{2}$ Particle Can Turn Out to be 100

Yakir Aharonov, David Z. Albert, and Lev Vaidman

Physics Department, University of South Carolina, Columbia, South Carolina 29208, and School of Physics and Astronomy, Tel-Aviv University, Ramat Aviv 69978, Israel

(Received 30 June 1987)

PACS numbers: 03.65.Bz

Мы обнаружили, что обычная измерительная процедура для пре- и пост-селектированных (отобранных) ансамблей квантовых систем дает необычные результаты. При некоторых обычных условиях “слабости” измерения ее результаты непротиворечивым образом определяют новый тип значения, который мы назвали “слабым” значением. Представлено описание измерения слабого значения компоненты спина для ансамбля пре- и пост-селектированных частиц со спином 1/2.

В данной статье будет описан эксперимент, в котором измеряется спиновая компонента частиц со спином 1/2, при этом получается результат, далеко выходящий за рамки диапазона “допустимых” значений. Мы начнем с краткого описания стандартной измерительной процедуры. Рассматривая измерения над ансамблем пре- и пост-селектированных систем, мы определим новое понятие: *слабое значение квантовой переменной*. В конце мы опишем измерение слабого значения на примере частицы со спином 1/2.

В квантовой теории результат измерения переменной A, имеющей дискретный набор собственных значений a_i, с необходимостью должен быть равен одному из этих значений. Гамильтониан стандартной измерительной процедуры[1,2] есть

$$H = -g(t)qA, \tag{1}$$

где $g(t)$ - нормированная функция с компактным носителем в окрестности времени измерения, q - каноническая переменная измерительного устройства с сопряженным импульсом π. Начальное состояние измерительного в идеальном случае должен быть таким, чтобы π был хорошо определенным. После взаимодействия (1) мы можем удостовериться, что финальное значение π есть $A = \delta\pi$.

В разумном приближении для реальной ситуации мы можем принять начальное состояние измерительной системы в виде гауссианы в q - (и, соответственно, π-) представлении. В этом случае гамильтониан (1) приводит к преобразованию

$$e^{-i\int H\,dt} e^{-\pi^2/4(\Delta\pi)^2} \sum_i a_i \,|\, A = a_i\rangle = \sum_i a_i e^{-(\pi - a_i)^2/4(\Delta\pi)^2} \,|\, A = a_i\rangle, \tag{2}$$

где $\sum_i a_i \mid A = a_i\rangle$ - начальное состояние нашей системы. Если разброс $\Delta\pi$ распределения π много меньше, чем разности между a_i, то после взаимодействия мы получим смесь гауссиан, расположенных вокруг a_i, коррелированных с различными собственными значениями A. Измерение π будет тогда указывать значение A.

В противоположном случае, когда $\Delta\pi$ много больше, чем все значения a_i, финальное распределение вероятности снова будет близко к гауссиане с разбросом $\Delta\pi$. Центр гауссианы будет соответствовать среднему значению A: $\langle A\rangle = \sum_i \mid a_i \mid^2 a_i$. Одиночное измерение такого типа не несет информации, поскольку $\Delta\pi \gg \langle A\rangle$; но мы можем выполнить то же самое измерение над каждым членом ансамбля из N частиц, приготовленных в одинаковом состоянии, и это уменьшит неопределенность в соответствии с множителем $1/\sqrt{N}$, тогда как среднее значение останется прежним, т.е. $\langle A\rangle$. Увеличивая число N частиц в ансамбле, мы можем выполнить измерение $\langle A\rangle$ с любой заданной точностью.

Результат измерения равен среднему по полученным значениям π в измерительном устройстве. Как было объяснено выше, это дает для достаточно большого ансамбля величину $\langle A\rangle$. Теперь возникает вопрос: можем мы изменить этот результат, учтя с помощью определенной процедуры пост селекции только некоторые (т.е. не все) значения π, которые образуют часть ансамбля? Разумеется, мы можем добиться этого тривиальным образом, отобрав измерительные устройства, которые дают только большие значения π. Их мы всегда можем найти, поскольку исходное распределение π всегда обладает ненулевым “хвостом”. Но предположим, что мы допускаем лишь постселекцию, выполненную над самими частицами; как тогда мы можем максимизировать результат усреднения π? Может с первого взгляда показаться, что что лучшим методом для этого является отобрать все частицы, для которых финальное состояние соответствует собственному значению $a_{\max}$. Но это не так. Неожиданно оказывается, что мы можем получить намного большие значения. Действительно, мы сейчас покажем, что вышеописанные измерения (при большом $\Delta\pi$), примененные к пре- и пост-селектированным ансамблям, могут дать новые значения, которые лежат далеко вне “разрешенного” диапазона, т.е. вне интервала $[\min(a_i), \max(a_i)]$. Процедура измереня следующая. Мы начинаем с большого ансамбля частиц, приготовленного в одном и том же начальном состоянии. Каждая частица взаимодействует с *отдельным* измерительным устройством, после чего отбираются измерения с заданным конечным состоянием. Наконец, мы учитываем лишь те “отсчеты” измерительных устройств, которые соответствуют отобранным частицам.

Рассмотрим ансамбль частиц с начальным состоянием $\mid \psi_{\text{in}}\rangle$ и конечным состоянием $\mid \psi_f\rangle$. В некоторый момент времени мы включаем взаимодействие (1), где начальное состояние каждого из измерительных устройств равно $[1/\sqrt{\Delta}(2\pi)^{1/4}] \times \exp(-q^2/4\Delta^2)$. После пост-селекции состояние измерительного устройства (с точностью до норимирующего множителя) есть

$$\langle \psi_f \mid e^{-i\int H\,dt} \mid \psi_{\text{in}}\rangle e^{-q^2/4\Delta^2} \cong \langle \psi_f \mid \psi_{\text{in}}\rangle \exp\left[iq\frac{\langle \psi_f \mid A \mid \psi_{\text{in}}\rangle}{\langle \psi_f \mid \psi_{\text{in}}\rangle}\right] e^{-q^2/4\Delta^2}. \qquad (3)$$

Эта формула справедлива, если разброс Δ достаточно мал[3]:

$$\Delta \ll \max_n \frac{|\langle \psi_f | \psi_{\text{in}} \rangle|}{(|\langle \psi_f | A^n | \psi_{\text{in}} \rangle|^{1/n})}. \tag{4}$$

В π - представлении состояние измерительного устройства приблизительно равно

$$\exp[-\Delta^2(\pi - \langle \psi_f | A | \psi_{\text{in}} \rangle / \langle \psi_f | \psi_{\text{in}} \rangle)^2]. \tag{5}$$

Стандартная интерпретация этого результата измерительного устройства состоит в том, что измеренное значение A равно $\langle \psi_f | A | \psi_{\text{in}} \rangle / \langle \psi_f | \psi_{\text{in}} \rangle$. Это – слабое значение A для данного ансамбля, подвергнутого пре- и пост-селекции:

$$A_w \equiv \langle \psi_f | A | \psi_{\text{in}} \rangle / \langle \psi_f | \psi_{\text{in}} \rangle. \tag{6}$$

Неопределенность π для каждого из измерительных устройств много больше, чем измеренное значение; т.е. $\Delta\pi = 1/2\Delta \gg A_w$ (см. уравнение (4)). Однако для ансамбля N таких устройств неопределенность для среднего значения π уменьшается в соответствии с множителем $1/\sqrt{N}$. Следовательно, если N достаточно велико, то $(1/\sqrt{N})\Delta\pi \ll A_w$, и значение A_w может быть найдено с нужной точностью. Как мы видим из определения (6), A_w не ограничено минимальным и максимальным собственными значениями A [4].

Можно удивиться тому, как суперпозиция сдвигов, каждый из которых меньше $a_{\max}$, приводит к сдвигу, который много больше $a_{\max}$. Мы покажем это, доказав математическое тождество, которое соответствует типу эксперимента, рассматриваемого в настоящей заметке (см. также Aharonov et al[5]).

Для всех функций $f(q)$, которые стремятся к нулю быстрее экспоненциальных функций: $f(q) < \exp(-\ln\alpha^2 |q|)$, можно обеспечить следующее равенство с любой точностью за счет нашего выбора достаточно большого N [6]:

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{iqn/N} f(q) \cong e^{i\alpha q} f(q), \tag{7}$$

где

$$c_n = \frac{N!}{n!(N-n)!} \left[\frac{1-\alpha^2}{4}\right]^N \left[\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right]^{n/2}.$$

Преобразование Фурье этого уравнения демонстрирует свойство, описанное выше: для функции $\tilde{f}(\pi)$, являющейся преобразованием Фурье для $f(q)$, суперпозиция сдвигов, каждый из которых меньше 1, эквивалентна сдвигу на произвольно большую величину, т.е.

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n \tilde{f}(\pi - n/N) \cong \tilde{f}(\pi - \alpha). \tag{8}$$

Мы теперь опишем эксперимент, в котором измеряется слабое значение z-компоненты спина частицы со спином 1/2 и получается произвольно большой результат для нее. Мы уверены, что подобный эксперимент может быть осуществлен в лаборатории.

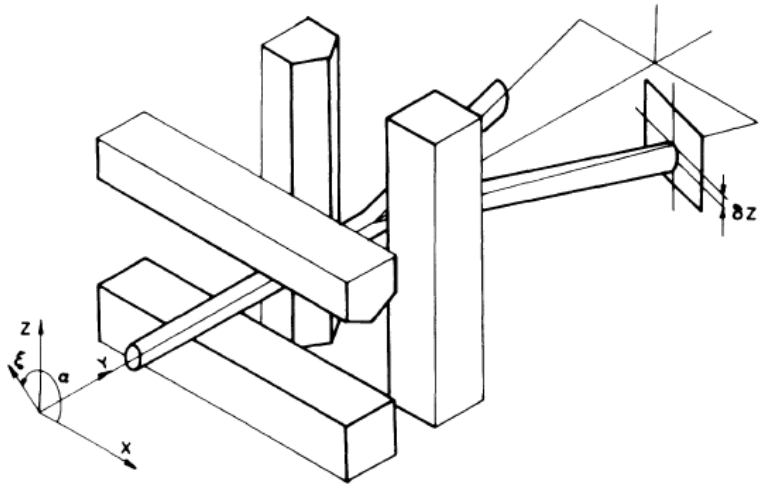

Рисунок 1. Экспериментальное устройство для измерения слабого значения спина σ_z. Пучок частиц со спином, направленным по $\hat{\xi}$, проходит через неоднородное (в z-направлении) *слабое* магнитное поле и расщепляется сильным магнитом с неоднородным полем, направленным по оси x. Пучок частиц с $\sigma_x = 1$ идет к экрану, и отклонение следа на экране пропорционально слабому значению σ_z: $\sigma_{z_w} = (\delta z p_0 \mu / l)(\partial B_z / \partial z)^{-1}$.

Пусть пучок частиц движется в направлении y с хорошо определенной скоростью. Вначале частицы локализованы в плоскости xz, и их спины ориентированы в направлении $\hat{\xi}$. Выберем направление $\hat{\xi}$ в плоскости xz так, чтобы между осями $\hat{\xi}$ и $\hat{\mathbf{x}}$ был угол α (рис. 1). Приготовленный пучок проходит через устройство Штерна-Герлаха, осуществляющее слабое измерение спина в z-направлении. Требование слабости выполняется благодаря тому, что градиент магнитного поля достаточно мал. Движение пучка изменяется, следовательно, только незначительно. Это слабое измерение вынуждает пространственную часть волновой функции преобразоваться в смесь двух слегка сдвинутых функций в p_z-представлении, скоррелированных с двумя значениями σ_z. Затем частицы пропускаются через другое – обычное – устройство Штерна-Герлаха, которое расщепляет их на два пучка, отвечающих двум значениям σ_x. Сохраним только пучок со спином $\sigma_x = 1$, который продолжает двигаться к расположенному перед ним экрану. Экран находится достаточно далеко, так что перемещение по оси $\hat{\mathbf{z}}$, обусловленное средним импульсом p_z, приобретенным при вышеуказанном слабом взаимодействии, оказывается больше, чем начальная неопределенность Δz. На экране мы получим широкий след, чье перемещение измеряется в направлении $\hat{\mathbf{z}}$. Это перемещение и даст слабое значение σ_z:

$$\sigma_{z,w} = \langle \uparrow_x | \sigma_z | \uparrow_\xi \rangle / \langle \uparrow_x | \uparrow_\xi \rangle = \tan \tfrac{1}{2}\alpha. \quad (9)$$

Приведем краткое математическое описание этого эксперимента. Частицы обладают массой m, магнитным моментом μ и средним импульсом p_0, направленным по оси y. Их начальное состояние есть

$$|\psi_{\text{in}}\rangle = \Delta^{-3/2}(2\pi)^{-3/4} e^{-x^2/4\Delta^2} e^{-z^2/4\Delta^2} e^{-y^2/4\Delta^2} e^{-ip_0 y}(\cos(\alpha/2)|\uparrow_x\rangle + \sin(\alpha/2)|\downarrow_x\rangle). \quad (10)$$

Гамильтониан слабого взаимодействия равен

$$H_1 = -\mu(\partial B_z/\partial z) z \sigma_z g(y - y_1), \quad (11)$$

причем $g(y - y_i)$ обладает компактным носителем в области, где расположено "слабое" устройство Штерна-Герлаха, которое обеспечивает выполнение условия $(m/p_0)\int g(y)\,dy = 1$. Это действительно гамильтониан типа фон Неймана, соответствующий уравнению (1). Поскольку $y \cong (p_0/m)t$, $g(y - y_1)$ является эффективной функцией времени (импульс по оси y удовлетворяет условию $p_0 \gg \Delta p_y = 1/2\Delta$), каноническая переменная q уравнения (1) равна здесь $\mu(\partial B_z/\partial z)z$. Изменение импульса в z-направлении во время взаимодействия равно $\delta p_z = \mu(\partial B_z/\partial z)\sigma_z$. Для нашего ансамбля пре- и пост-селектированных частиц мы увидим, что $\delta p_z = \mu(\partial B_z/\partial z)\tan(\alpha/2)$. Необходимое условие слабости взаимодействия есть (см. уравнение (4)):

$$\mu\left|\frac{\partial B_z}{\partial z}\right| \max\left[\left|\tan\frac{\alpha}{2}\right|, 1\right] \ll \Delta p_z = \frac{1}{2\Delta}. \quad (12)$$

Гамильтониан второго устройства Штерна-Герлаха, который отбирает частицы с $\sigma_x = 1$, равен

$$H_2 = -\mu(\partial B_x/\partial x) x \sigma_x g(y - y_2). \quad (13)$$

Условие для расщепления пучка есть

$$\mu\,|\partial B_x/\partial x| \gg \Delta p_x = 1/2\Delta$$

Если угол α между направлением спина в начальном и конечном состоянии близок к π, то это условие должно быть усилено, т.е.

$$\exp(-2\Delta^2\mu^2\,|\partial B_x/\partial x|^2 \ll \cot^2(\alpha/2).$$

Направление пучка с $\sigma_x = 1$ есть $\mu(\partial B_x/\partial x)\hat{\mathbf{x}} + p_0\hat{\mathbf{y}}$. Экран расположен на расстоянии l таком, что

$$\frac{l\mu}{p_0}\left|\frac{\partial B_z}{\partial z}\tan\frac{\alpha}{2}\right| \gg \Delta.$$

Волновая функция частицы в z-представлении перед коллапсом на экране приблизительно равна

$$\exp\left[-\Delta^2\left(\frac{p_0}{l}\right)^2\left(z-\frac{l\mu}{p_0}\frac{\partial B_z}{\partial z}\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2\right]. \qquad (14)$$

Измеренное значение компоненты спина, соответствующее этой волновой функции, равно $\tan(\alpha/2)$. Грубая оценка числа частиц N в начальном пучке, необходимом для получения заданной точности $1/M$, дает $N \cong M^3/\cos^2(\alpha/2)$.

В вышеприведенном описании мы до сих пор не учитывали влияние градиентов $\partial B_x/\partial x$ и $\partial B_y/\partial y$, которые не могут оба исчезать, поскольку $\mathrm{div}\mathbf{B}=0$. В стандартном эксперименте Штерна-Герлаха решают эту проблему, добавляя сильное постоянное магнитное поле в направлении измеряемой компоненты спина. Интересно отметить, что тот же самый метод может быть использован в нашем слабом измерении. Сильное магнитное поле в z-направлении будет, разумеется, поворачивать направление спина и, следовательно, во время взаимодействия (11) мы должны вычислять слабое значение, полученное не между состояниями $|\uparrow_\xi\rangle$ и $|\uparrow_x\rangle$ (см. уравнение (6)), а между повернутыми состояниями. Оказывается, однако, что если мы приложим магнитное поле в z-направлении так, что оно повернет спин во время взаимодействия на $2n\pi$, то слабое значение σ_z за весь период взаимодействия не изменится.

Другой удивительный аспект этого эксперимента становится очевидным, когда мы рассматриваем его как устройство для измерения малого градиента магнитного поля $\partial B_z/\partial z$. Наш выбор α близким к π дает огромное усиление. В самом деле, любая *слабая* связь со спином частиц из нашего пре- и пост-селектированного ансамбля будет усилена в $[\cos(\alpha/2)]^{-1}$ раз.

Данное исследование было частично поддержано Национальным научным фондом, грант № PHY 8408265.

---

[1] J. von Neumann, *Mathematische Gründlagen der Quantemechanik* (Springer-Verlag, Berlin, 1932) [English translation: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1955)].

[2] Этот гамильтониан (1) является эффективным гамильтонианом измерительного устройства Штерна-Герлаха, как объясняется ниже, см. уравнение (11).

[3] Если условие (4) выполнено, то

$$\langle\psi_f|e^{-i\int H\,dt}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle e^{-q^2/4\Delta^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iq)^n}{n!}\langle\psi_f|A^n|\psi_{\mathrm{in}}\rangle e^{-q^2/4\Delta^2}\cong$$
$$\cong\langle\psi_f|\psi_{\mathrm{in}}\rangle\left(1+\frac{iq(\langle\psi_f|A|\psi_{\mathrm{in}}\rangle)}{\langle\psi_f|\psi_{\mathrm{in}}\rangle}\right)e^{-q^2/4\Delta^2}\cong\langle\psi_f|\psi_{\mathrm{in}}\rangle\exp\left[iq\frac{\langle\psi_f|A|\psi_{\mathrm{in}}\rangle}{\langle\psi_f|\psi_{\mathrm{in}}\rangle}\right]e^{-q^2/4\Delta^2}.$$

[4] Величина A_w может быть даже комплексным числом. Измерение π дает только действительную часть $\mathrm{Re}A_w$. В нашем случае, где начальное состояние измерительного устройство описывается гауссианой, мы можем также найти мнимую часть $\mathrm{Im}A_w$, измеряя саму каноническую переменную q. Действительно, в q -представлении состояние измерительного устройства есть

$$e^{iq\,\mathrm{Re}A_w}\exp\left(-\frac{1}{4\Delta^2}(q+2\Delta^2\,\mathrm{Im}A_w)^2\right).$$

[5] Y. Aharonov, D. Albert, A. Casher, and L. Vaidman, Phys. Lett. A **124**, 199 (1987).

[6] Коэффициенты c_n выводятся из биномиального разложения. Мы можем переписать левую сторону (7), часть, которая умножается на $f(q)$, в виде

$$\begin{aligned}\sum_{n=N}^{N}\frac{N!}{n!(N-n)!}\left(\frac{1-\alpha^2}{4}\right)^N\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^{n/2}e^{iqn/N}&\\ =\left(\frac{1+\alpha}{2}e^{iq/2N}+\frac{1-\alpha}{2}e^{-iq/2N}\right)^{2N}&\\ =[\cos(q/2N)+i\alpha\sin(q/2N)]^{2N}&\\ =[1-(1-\alpha^2)\sin^2(q/2N)]^N e^{i2N\phi},&\end{aligned}$$

где $\tan\phi=\alpha\tan(q/2N)$. При $f(q)<\exp(-\ln\alpha^2|q|)$ мы получаем

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}c_n e^{iq/2N}f(q)&\\ =\lim_{N\to\infty}[1-(1-\alpha^2)\sin^2(q/2N)]^N e^{i2N\phi}f(q)&\\ =e^{i\alpha q}f(q).&\end{aligned}$$

Это доказывает наше утверждение, относящееся к (7).