

Унифицированное описание когерентности и поляризации на основе матрицы плотности

Б. де Лима Бернардо (Бразилия)

Сокращенный перевод М.Х. Шульмана (shulman@dol.ru, www.timeorigin21.narod.ru)

arXiv:1606.00956v1 [quant-ph] 3 Jun 2016

Unified quantum density matrix description of coherence and polarization

Bertulio de Lima Bernardo (bertulio.fisica@gmail.com)

Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, 50670-901 Recife-PE, Brazil

PACS numbers: 42.50.-p, 42.50.Ex, 03.65.Yz

Свойства когерентности и поляризации света являлись предметом интенсивных исследований и образуют базис многих технологических приложений. Эти понятия, которые исторически трактовались независимо, могут быть теперь сформулированы в рамках единой классической теории. В настоящей работе дается вывод квантового аналога этой теории на базе формализма матрицы плотности, которая совместно описывает свойства когерентности и поляризации ансамбля фотонов. Этот метод используется с целью показать, как степень поляризации специального класса смешанных состояний меняется при распространении в вакууме, и как взаимодействующее окружение может подавлять степень когерентности и поляризации общего состояния. Это последнее применение может быть, в частности, полезно при анализе эффектов декогеренции в области оптической квантовой информатики.

I. ВВЕДЕНИЕ

Когерентность и поляризация являются, без сомнения, двумя наиболее важными свойствами света, теоретические описания которых развивались независимо [1–3]. Однако в течение последнего десятилетия изучение этих, казалось бы, двух разных характеристик удалось свести к общей формулировке в рамках единой теории, которую ввел Wolf [4]. В этой основополагающей работе было показано, что и когерентность, и поляризация случайных электромагнитных пучков могут быть поняты как проявления корреляций между флуктуациями оптического поля. В этом отношении когерентность проявляет себя через корреляции между флуктуациями электрического поля светового пучка в двух и более точках пространства, тогда как поляризация возникает из корреляций компонент электрического поля в одной точке пространства [5].

С момента публикации обобщающей теории было выдвинуто много других идей, сделавших полным понимание этой проблемы. Например, введение обобщенных параметров Стокса [6], объяснение изменения поляризации частично когерентного электромагнитного пучка при распространении в вакууме [7, 8] и в турбулентной атмосфере, и некоторые другие.

Тем не менее, большинство всех этих работ было ограничено рамками классической теории электромагнетизма. На самом деле имеются некоторые

недавние работы, расширяющие классическую обобщенную теорию до квантовой механики путем прямого квантования электромагнитного поля [11, 12]. До настоящего времени такое расширение не привело к существенному прояснению проблемы в сравнении с классическим аналогом, возможно, потому, что состояние поля характеризуется в пространстве Фока, которое иногда делает физическую интуицию менее точной и, в зависимости от окружения, в которое может быть помещена система, трудно подобрать подходящий гамильтониан для учета времени эволюции.

В данной работе мы выводим единое квантовомеханическое описание когерентности и поляризации из “первых принципов”, т.е., так сказать, без прямого обращения к классической теории. Как будет видно, центральным элементом в этом формализме является матрица плотности, представленная в терминах координаты и поляризации в гильбертовых пространствах. Благодаря этому метод оказывается относительно простым при описании поведения общего ансамбля фотонов при распространении в вакууме, а также при воздействии среды. Действительно, мы демонстрируем некоторые приложения, показывающие, как частично когерентный ансамбль фотонов изменяет степень поляризации при распространении в вакууме, и как декогеренция и деполяризация возникают в среде, компоненты которой могут обладать свойствами отражения и двойного лучепреломления (birefringent). Поскольку все эти примеры представлены с использованием простых квантовомеханических аргументов, данное описание может быть, в частности, полезным при изучении окружающих возмущений в рамках оптической квантовой информатики, где свойства когерентности и поляризации играют фундаментальную роль.

II. ТЕОРИЯ

Начнем с вывода выражения для степени пространственной когерентности света, подобного выведенному в классической теории [4]. Для этого рассмотрим двухщелевой эксперимент Юнга, в котором ансамбль фотонов распространяется близко к оси z , который в основном пропускается через две небольшие щели в ней. Затем положение фотонов, которые проходят через щели, постоянно регистрируются на удаленном от щелей детектирующем экране, как показано на рис. 1. Пусть $|0\rangle$ и $|1\rangle$ обозначают квантовые состояния фотонов, которые проходят через щели Q_0 и Q_1 , соответственно, а $|H\rangle$ и $|V\rangle$ - состояния фотонов, поляризованные вдоль горизонтальной (x) и вертикальной (y) осей, соответственно. Тогда мы можем написать общее квантовое состояние фотонов в виде

$$|\psi\rangle = a |H, 0\rangle + b |H, 1\rangle + c |V, 0\rangle + d |V, 1\rangle, \quad (1)$$

где $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$, с целью описать одновременно обе щели, через которые фотоны проходят, и состояние поляризации. Мы также можем написать матрицу плотности для этой системы в виде $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, т.е. 4 x 4 матрицы следующего формата:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* & ac^* & ad^* \\ ba^* & |b|^2 & bc^* & bd^* \\ ca^* & cb^* & |c|^2 & cd^* \\ da^* & db^* & dc^* & |d|^2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение.

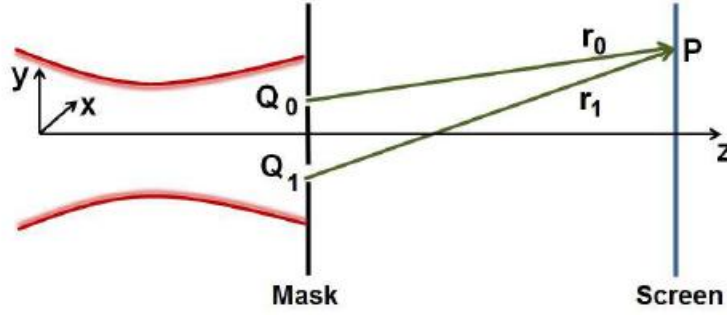


Рисунок 1 (цветной). Схема двухщелевого эксперимента. Ансамбль фотонов попадает на маску с двумя щелями Q_0 и Q_1 , определяющими два возможных пути, которые после этого детектируются на экране.

Теперь, если мы интересуемся вычислением плотности вероятности $\rho(P)$ найти фотон в точке P на детектирующем экране, то помня, что горизонтально поляризованные фотоны не интерferируют с вертикально поляризованными, мы получаем

$$\rho(P) = \langle H, P | \rho | H, P \rangle + \langle V, P | \rho | V, P \rangle, \quad (3)$$

где $|H, P\rangle$ и $|V, P\rangle$ представляют состояния фотонов, локализованных в P с горизонтальной и вертикальной поляризацией соответственно. Предполагая, что размер щелей много меньше длины волны фотонов, мы можем считать, что после прохождения через данную щель волновые функции фотонов являются сферическими волнами. Следовательно, амплитуды вероятностей нахождения фотона в точке P с горизонтальной (вертикальной) поляризацией, который прошел через щель Q_0 (Q_1), даются соотношениями, соответственно,

$$\psi_{H,V}^{(P)}(r_0) = \langle H, P | H, 0 \rangle = \langle V, P | V, 0 \rangle = \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \quad (4)$$

и

$$\psi_{H,V}^{(P)}(r_1) = \langle H, P | H, 1 \rangle = \langle V, P | V, 1 \rangle = \frac{e^{ikr_1}}{r_1}, \quad (5)$$

где i - мнимая единица, k - волновое число. Параметры r_0 и r_1 - расстояния от щелей Q_0 и Q_1 до точки P , соответственно. Подстановкой уравнений (4) и (5) в уравнение (3) и исключением членов с внутренними произведениями горизонтального и вертикального поляризационных состояний, мы получаем

$$\rho(P) = \frac{\rho_{11} + \rho_{33}}{r_0^2} + \frac{\rho_{22} + \rho_{44}}{r_1^2} + \frac{2\text{Re}[(\rho_{21} + \rho_{34})e^{ik(r_0-r_1)}]}{r_0 r_1}, \quad (6)$$

где мы использовали тот факт, что матрица ρ является эрмитовой ($\rho_{mn} = \rho_{nm}^*$), а Re обозначает действительную часть.

Рассмотрим уравнение (6) в различной перспективе. Заметим, что если щель Q_1 закрыта, амплитуды b и d в уравнении (1) обращаются в нуль, следовательно уравнение (6) редуцируется до выражения

$$\rho_0(P) = \frac{\rho_{11} + \rho_{33}}{r_0^2}, \quad (7)$$

которое представляет плотность вероятности найти фотон, который возникает в точке P , пройдя через щель Q_0 . Аналогично, плотность вероятности найти фотон, который возникает в точке P , пройдя через щель Q_1 , дается выражением

$$\rho_1(P) = \frac{\rho_{22} + \rho_{44}}{r_1^2}. \quad (8)$$

В этом контексте уравнение (6) может быть переписано в виде

$$\rho(P) = \rho_0(P) + \rho_1(P) + 2\sqrt{\rho_0(P)}\sqrt{\rho_1(P)}\text{Re}[\mu e^{ik(r_0 - r_1)}], \quad (9)$$

где параметр μ дается выражением

$$\mu = \frac{\rho_{12} + \rho_{34}}{\sqrt{\rho_{11} + \rho_{33}}\sqrt{\rho_{22} + \rho_{44}}}. \quad (10)$$

Первые два члена в уравнении (9) соответствуют сумме индивидуальных плотностей вероятности фотонов, которые прошли через каждую щель, а последний член отвечает за интерференцию на детектирующем экране. Заметим, что параметр, который обуславливает отчетливость интерференции в такой системе, это именно μ , который мы определяем как *степень когерентности*.

Подставляя амплитуды a , b , c и d в уравнение (10) и используя неравенство Коши-Шварца, легко показать, что $0 \leq |\mu| \leq 1$. Поскольку интерференционный член максимален при $|\mu| = 1$, мы говорим, что ансамбль фотонов *полностью когерентен* относительно щелей Q_0 и Q_1 . С другой стороны, при $\mu = 0$ интерференция полностью исчезает, и мы говорим, что ансамбль фотонов *полностью некогерентен* относительно щелей. В промежуточных случаях (при $0 < |\mu| < 1$) мы говорим, что фотоны *частично когерентны*. Несмотря на тот факт, что мы использовали чисто квантовомеханический метод для вывода степени когерентности в уравнении (10), было интересно обнаружить математическое сходство с классической теорией (см. уравнение (8) в [4]).

Теперь мы переходим к анализу поляризации в этой системе и к выводу степени поляризации. Вначале сконцентрируемся только на фотонах, проходящих через щель Q_0 . В этой точке мы определим квантовую версию параметров Стокса так (см. сходный анализ в [13])

$$S_0^{(0)} = \text{tr}[[H, 0] \langle H, 0 | \rho] + \text{tr}[[V, 0] \langle V, 0 | \rho] = \rho_{11} + \rho_{33}, \quad (11)$$

$$S_1^{(0)} = \text{tr}[[H, 0] \langle H, 0 | \rho] - \text{tr}[[V, 0] \langle V, 0 | \rho] = \rho_{11} - \rho_{33}, \quad (12)$$

$$S_2^{(0)} = \text{tr}[[H, 0] \langle V, 0 | \rho] + \text{tr}[[V, 0] \langle H, 0 | \rho] = \rho_{31} + \rho_{13}, \quad (13)$$

$$S_3^{(0)} = i\{\text{tr}[[V, 0] \langle H, 0 | \rho] + \text{tr}[[H, 0] \langle V, 0 | \rho]\} = i(\rho_{13} - \rho_{31}) \quad (14)$$

где tr обозначает след матрицы. Соответственно, степень поляризации для Q_0 может быть определена как [14, 15]

$$p_0 = \frac{\sqrt{(S_1^{(0)})^2 + (S_2^{(0)})^2 + (S_3^{(0)})^2}}{S_0^{(0)}}, \quad (15)$$

которая является действительной величиной и находится в диапазоне $0 \leq p_0 \leq 1$ [5]. После подстановки уравнений (11), (12), (13) и (14) в уравнение (15) и некоторых алгебраических преобразований ее можно представить в виде

$$p_0 = \sqrt{1 - \frac{4(\rho_{11}\rho_{33} - \rho_{13}\rho_{31})}{(\rho_{11} + \rho_{33})^2}}, \quad (16)$$

что является конечным выражением для степени поляризации. При таком определении мы получаем: (i) если $0 < p_0 < 1$, то ансамбль называется *частично поляризованным*; (ii) если $p_0 = 0$, то ансамбль *неполяризован*; и (iii) если $p_0 = 1$, то ансамбль полностью *поляризован*. Подобным же образом можно показать, что степень поляризации фотонов, проходящих через отверстие Q_1 , дается выражением

$$p_1 = \sqrt{1 - \frac{4(\rho_{22}\rho_{44} - \rho_{24}\rho_{42})}{(\rho_{22} + \rho_{44})^2}}. \quad (17)$$

И снова мы обращаем внимание на математическое сходство между выражением степени поляризации, выведенным здесь и имеющим чисто квантовомеханическую природу, с тем, которое получено классическими методами [4].

До сих пор мы обсуждали свойства когерентности и поляризации, основанные на чистом состоянии уравнения (1). Однако в общем случае смешанного состояния

$$\hat{\rho} = \sum_i w_i \rho^{(i)} = \sum_i w_i |\psi^{(i)}\rangle \langle \psi^{(i)}|, \quad (18)$$

где w_i - доля каждого чистого состояния $\rho^{(i)}$ в ансамбле фотонов, так что можно записать матрицу плотности системы в виде

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где каждый элемент дается выражением $\rho_{nm} = \sum_i w_i \rho_{nm}^{(i)}$. В этом виде все выводы, проделанные выше, одинаково справедливы для смешанной матрицы плотности, включая выражения для степеней когерентности и поляризации в уравнениях (10), (16) и (17).

Теперь мы представим некоторые применения для полученных уравнений, чтобы объяснить их физический смысл. Рассмотрим, например, чистый ансамбль горизонтально поляризованных фотонов с одинаковой вероятностью прохождения через обе щели. Он описывается состоянием $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H, 0\rangle + |H, 1\rangle)$, так что степень когерентности, как и поляризации, являются максимальными, именно, $\mu = 1$, $p_0 = 1$ и $p_1 = 1$.

Это – ожидаемые результаты, поскольку у нас нет информации, через какую щель прошли фотоны, и все они обладают хорошо определенной поляризацией. В действительности для чистого состояния, описываемого уравнением (1), два аспекта определяют когерентность: (i) соотношения между вероятностями для фотона пойти через щель Q_0 и Q_1 , и (ii) сходство между горизонтально и вертикально поляризованным фотонами в отношении к фазовому соотношению прохождения через две щели. В первом случае чем больше распределены вероятности для фотона пройти через каждую щель, тем больше степень когерентности. В отношении степеней поляризации легко видеть, что они имеют максимум для чистого состояния, $p_0 = p_1 = 1$. Это также ожидаемо, поскольку, независимо от амплитуд a , b , c и d , мы всегда имеем хорошо определенную поляризацию в H-V базисе для состояния $|\psi\rangle$ в уравнении (1).

Заметим, что настоящее обсуждение действительно также для состояний, чьи когерентные свойства запутаны со свойствами поляризации. Например, состояние $|\psi\rangle = a|H, 0\rangle + d|V, 1\rangle$ предполагает $\mu = 0$, $p_0 = 1$ и $p_1 = 1$. Причина, по которой степень когерентности нулевая, состоит в том, что поляризация дает информацию о пути фотонов, которая подавляет интерференцию. Степень поляризации максимальна потому, что поляризация полностью определена в каждой щели, а именно – горизонтальная в Q_0 и вертикальная в Q_1 .

Эта ситуация намного сложнее для смешанных состояний. Здесь мы проанализируем два частных примера. Во-первых, рассмотрим смешанное состояние

$$\hat{\rho} = 1/4[|H, 0\rangle\langle H, 0| + |V, 0\rangle\langle V, 0| + |H, 1\rangle\langle H, 1| + |V, 1\rangle\langle V, 1|], \quad (20)$$

которое представляет полностью случайный ансамбль фотонов с одинаковой вероятностью иметь вертикальную и горизонтальную поляризацию пройти через щели Q_0 и Q_1 . Тогда, в силу соответствующих причин, степень когерентности и поляризации нулевые: $\mu = 0$, $p_0 = 0$ и $p_1 = 0$. Следующий пример имеет особый интерес. Он представляет смешанное состояние, чьи степени свободы – когерентность и поляризация – сепарабельны:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \hat{\rho}_p \otimes \hat{\rho}_c \\ &= 1/2[|H\rangle\langle H| + |V\rangle\langle V|] \\ &\otimes 1/2[|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|]. \end{aligned} \quad (21)$$

Степени когерентности и поляризации для этого состояния имеют значения $\mu = 1$, $p_0 = 0$ и $p_1 = 0$. Т.е. ансамбль фотонов полностью неполяризован в каждой щели; однако он полностью когерентен по отношению к ним. Вольф обратил внимание на это необычное поведение при построении классической теории [4].

III. ИЗМЕНЕНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ В ВАКУУМЕ

Раздел не переведен

IV. ДЕКОГЕРЕНЦИЯ И ДЕПОЛЯРИЗАЦИЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ СО СРЕДОЙ

Раздел не переведен

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение повторим, что мы предложили новую унифицированную теорию когерентности и поляризации, основанную исключительно на “первых принципах” квантовомеханического подхода. Эта теория основана на матрице плотности, записанной в терминах координатных и поляризационных состояний ансамбля фотонов, откуда мы выводим выражения для степени когерентности и поляризации системы. Для подтверждения справедливости и эффективности модели с ее помощью было показано, как степень поляризации смешанного ансамбля фотонов варьируется при распространении в вакууме; проблема, которая, насколько нам известно, была исследована только на основе классической электромагнитной теории. Далее, мы успешно использовали наш метод для описания поведения свойств когерентности и поляризации ансамбля фотонов, испытывающего взаимодействия с внешней средой. В этом случае были продемонстрированы два примера взаимодействующих сред: один обусловлен случайными сдвигами фазы в двух различных точках плоскости, перпендикулярной направлению распространения, а другой – фазовыми сдвигами, но зависящими от поляризации. В этом контексте мы использовали представление операторных сумм для раскрытия темпоральной эволюции системы. Однако важно подчеркнуть, что в зависимости от типа взаимодействия, которому подвергается фотонная система, для описания динамики может быть также использован формализм мастер-уравнения. В будущих работах мы намерены использовать настоящее исследование для изучения действия других типов среды с использованием мастер-уравнений.

Благодарности

The author is grateful to A. S. L. Gomes and Cid B. de Araújo for their hospitality at Universidade Federal de Pernambuco, and to the financial support from the Brazilian funding agency CNPq, Grant Number 165940/2015-8.

Ссылки

- [1] M. Born and E. Wolf, Principles of Optics, Cambridge University Press, (Cambridge, 1999).
- [2] C. Brosseau, Prog. Opt. 54, 149 (2010).
- [3] L. Mandel and E. Wolf, Optical Coherence and Quantum Optics, Cambridge University Press, (Cambridge, 1995).
- [4] E. Wolf, Phys. Lett. A 312, 263 (2003).
- [5] E. Wolf, Introduction to the Theory of Coherence and Polarization of Light, Cambridge University Press (Cambridge, 2007).

- [6] O. Korotkova and E. Wolf, Opt. Lett. 30 198 (2005).
- [7] O. Korotkova and E. Wolf, Opt. Commun. 246 35 (2005).
- [8] M. Salem and E. Wolf, Opt. Lett. 30 198 (2005).
- [9] O. Korotkova, M. Salem, and E. Wolf, Opt. Commun. 233 255 (2004).
- [10] H. Roychowdhury, S. A. Ponomarenko and E. Wolf, J. Mod. Opt. 52 1611 (2005).
- [11] M. Lahiri and E. Wolf, Phys. Rev. A 82, 043805-1 (2010).
- [12] M. Lahiri and E. Wolf, Phys. Rev. A 82, 043837-1 (2010).
- [13] J. B. Altepeter, E. R. Jeffrey, P. G. Kwiat, Adv. At. Mol. Opt. Phys. 52, 105 (2005).
- [14] C. Brosseau, Fundamentals of Polarized Light: A Statistical Optics Approach, Wiley (New York, 1998).
- [15] G. Bjork, J. Soderholm, L. L. Sanchez-Soto, A. B. Klimov, I. Ghiu, P. Mariand, T. A. Marian, Opt. Commun. 283 4440 (2010).
- [16] These fractional populations concern the probabilities to find photons from each subensemble at the points Q_0 and Q_1 (at $z=0$), not the probabilities to find them in the whole volume which contains the ensemble.
- [17] A. E. Siegman, Lasers, University Science Books (Mill Valley, 1986).
- [18] D. F. V. James, J. Opt. Soc. Am A 11, 1641 (1994)
- [19] W. H. Zurek, Rev. Mod. Phys. 75 715–775 (2003).
- [20] M. Schlosshauer, Rev. Mod. Phys. 76 1267–1305 (2005).
- [21] M. Schlosshauer, Decoherence and the quantum to classical transition, 1st Ed. (Springer, 2007).
- [22] B. de Lima Bernardo, Braz. J. Phys. 44 202 (2014).
- [23] W. H. Zurek, Phys. Today 67 44 (2014).
- [24] W. H. Zurek, Nat. Phys. 5 181 (2009).
- [25] K. Kraus, Effects, and Operations: Fundamental Notions in Quantum Theory, Lect. Notes Phys., Vol. 190 (Springer-Verlag, Berlin, 1983).
- [26] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, 1st Ed. (Cambridge University Press, 2000).
- [27] H. Weichel, Laser Beam Propagation in the Atmosphere SPIE Optical Engineering Press (Bellingham, 1990).
- [28] P. K. A. Wai and C. R. Menyuk, Opt. Lett 19 1517 (1994).
- [29] J. P. Preskill, Quantum Computation Lecture Notes for Physics 219/Computer Science 219 (<http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/>).
- [30] H.-P. Breuer, F. Petruccione, The Theory of Open Quantum Systems, (Oxford University Press, Oxford, 2002).
- [31] A. Rivas, A. D. K. Plato, S. F. Huelga, and M. B. Plenio, New J. Phys. 12 113032 (2010).