

## Траектории без квантовых неопределенностей

Е. Ползик и К. Хаммерер (Дания, Германия)

Перевод М.Х. Шульмана ([shulman@dol.ru](mailto:shulman@dol.ru), [www.timeorigin21.narod.ru](http://www.timeorigin21.narod.ru))

---

arXiv:1405.3067v1 [quant-ph] 13 May 2014  
(Annalen der Physik, 14 May 2014)

Trajectories without quantum uncertainties

Eugene S. Polzik<sup>1</sup> and Klemens Hammerer<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Niels Bohr Institute, Copenhagen University, Blegdamsvej 17, 2100 Copenhagen, Denmark

<sup>2</sup>Institute for Theoretical Physics, Institute for Gravitational Physics (Albert Einstein Institute), Leibniz University

Hannover, Callinstr. 38, 30167 Hannover, Germany

---

Общепринятая точка зрения предполагает, что траектории частиц в квантовой механике всегда характеризуются квантовыми неопределенностями. Эти квантовые неопределенности обусловлены принципом неопределенности Гейзенберга, накладывающим ограничения на точность измерения полей и сил, что, в конечном счете, порождает стандартный квантовый предел в метрологии. В условиях быстрого развития чувствительности измерений такие пределы были практически достигнуты в разных типах измерений, включая измерения полей и ускорений. В данной публикации показывается, что квантовая траектория одной системы, измеренная относительно другой (“эталонной”) системы с эффективной отрицательной массой, может быть свободной от квантовой неопределенности. Этот метод решающим образом основан на возникновении связанного ЭПР-состояния двух объектов, один из которых обладает эффективной отрицательной массой. В практической перспективе эти идеи открывают путь к измерениям силы и ускорения при новейших измерениях с чувствительностью, близкой к стандартному квантовому пределу.

Квантовые неопределенности, накладываемые принципом неопределенности Гейзенберга, определяют фундаментальные границы точности измерений. При быстром развитии чувствительности измерений эти пределы практически были достигнуты в измерениях различных типов, включая измерения полей, времени, ускорения и координат. Считается общепринятым, что баланс между количеством информации, полученной при измерении, и обратным влиянием на измерение в лучшем случае может соответствовать стандартному квантовому пределу при измерении координаты [1, 2, 3, 4, 5]. Идеи о том, как обойти этот предел, основывались на частотно-зависимом сжатии [6], вариационном измерении [7], использовании сред Керра [8], двойных механических резонаторах [9, 10], эффекте оптической пружины [11], стробоскопических измерениях [5] или двух-тоновых измерениях [1, 12, 2, 13, 14]. Однако все эти подходы ограничены измерениями единичного оператора квадратуры системы и, следовательно, неизбежно ограничены измерениями возмущений, фаза которых известна заранее. На практике фаза детектируемого сигнала обычно неизвестна, поэтому желателен иной подход.

Новый подход к исключению обратного влияния был продемонстрирован в работе Wasilewski и др. [15], где тщательно подготовленное квантовое измерение над двумя запутанными спиновыми системами привело к частичному исключению квантового шума при измерении для датчика магнитных полей. Основой этого подхода была экспериментальная демонстрация состояния Эйнштейна-Подольского-Розена (ЭПР) двух атомных спиновых осцилляторов [16], один из которых характеризовался эффективной отрицательной массой. Такое запутанное ЭПР-состояние может быть также создано в гибридной системе, объединяющей наномеханический осциллятор и атомную спиновую систему с эффективной отрицательной массой [17]. Совсем недавно была сформулирована общая теоретическая платформа для такого подхода [18, 19]. Следуя этим работам, были выдвинуты предложения для устранения обратного влияния на измерения, использующие конденсат Бозе-Эйнштейна [20] или двух-тоновый привод [21] для создания осциллятора с эффективной отрицательной массой, и исследовались всевозможные оптические приложения, см. [18, 19] и [22].

В настоящей статье показано, как, используя запутанное состояние осциллятора с положительной и отрицательной массой, можно предсказать квантовую траекторию магнитного или механического осциллятора, измеренную относительно специально выбранной точки с принципиально произвольно низкой неопределенностью. Нашей целью является развитие интуитивной физической картины для этого нового подхода к метрологии, допускающей преодоление стандартного квантового предела, и иллюстрирующей его на основе измерений, описанных в [15]. Мы строим свой дискурс на трех принципах. Во-первых, мы утверждаем, что траектория должна быть определена относительно некоторого физического центра. Во-вторых, мы интерпретируем эту физический центр как квантовый объект. Наконец, мы разрешаем данному объекту обладать эффективной отрицательной массой. При этом условии траектория, определенная относительно данного центра, может быть найдена с произвольной точностью в любой момент времени. Помимо фундаментального к нему интереса, данный подход открывает путь к измерениям силы и ускорения с новыми уровнями чувствительности.

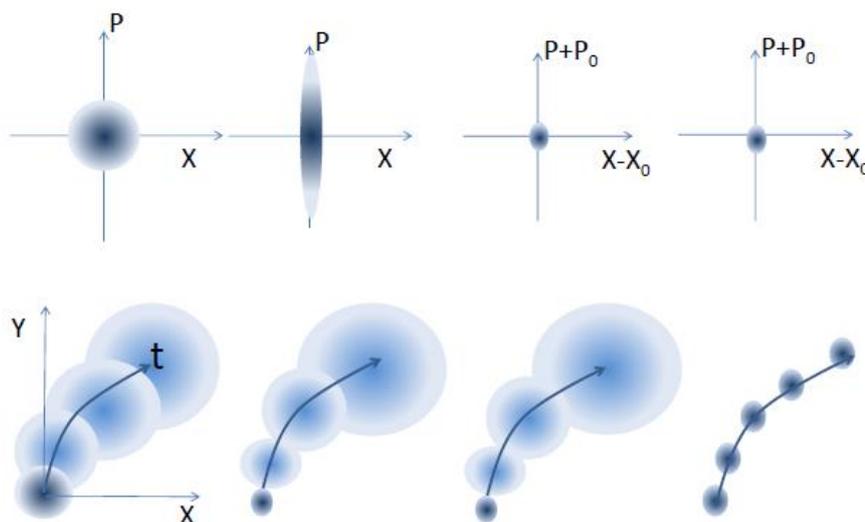


Рисунок 1. Траектории для различных квантовых состояний. Верхний ряд – квантовые состояния системы, нижний ряд - траектории. Слева направо: когерентное состояние, сжатое состояние, ЭПР-состояние с положительной массой (частотой), ЭПР-состояние с отрицательной массой (частотой).

Согласно принципам квантовой механики точность, с которой мы можем узнать координату  $X$  любого объекта, ограничена рядом факторов. Прежде всего, принцип Гейзенберга требует, чтобы неопределенности координаты и сопряженной к ней переменной – импульса  $P$ , в любой момент удовлетворяли условию  $\Delta X \Delta P \geq \hbar/2$  в качестве следствия канонического коммутатора  $[X, P] = i\hbar$ . Это, разумеется, не запрещает координате иметь произвольно точно определенное положение в конкретный момент времени, если импульс определен в этот же момент с нужной степенью грубости. Такое сжатое состояние движения было продемонстрировано для массивного гармонического осциллятора в виде “вмороженного” иона. Однако, поскольку система эволюционирует – например,  $X(t) = X(0) + tP(0)/m$  для частиц с массой  $m$  – большая неопределенность по импульсу будет приводить к большой неопределенности по координате в последующие моменты времени. Следовательно, траектория свободно эволюционирующей квантовой частицы не может быть известна с произвольной точностью в произвольные моменты времени, как поясняет рис. 1.

К счастью, существует квантовый трюк, который может сыграть роль в преодолении квантового заговора. Прежде всего, заметим, что измерение координаты  $X$  с необходимостью является измерением *относительного* расстояния между частицей и ее начальным положением в точке  $X_0$ . Где бы обычно эта точка отсчета не выбиралась в случае классического объекта, мы будем рассматривать квантовую систему отсчета [24, 25]. Эта точка отсчета рассматривается как квантовая степень свободы на равных основаниях с переменными измеряемой системы, для которых  $[X, P] = i\hbar$ . Т.е., скажем, измерение и установление положения частицы *всегда* неявно подразумевает относительное расстояние  $X - X_0$  между двумя системами. Предположим теперь, что это относительное положение измерен в момент времени  $t = 0$ . Относительное положение в будущие моменты времени, предполагающее свободную эволюцию, задается тогда соотношением  $X(t) - X_0(t) = X(0) - X_0(0) + t[P(0)/m - P_0(0)/m_0]$ . Предположим далее, что “квантовый центр” представляет собой очень специальный тип частицы, а именно обладает *отрицательной массой*, физика которого будет подробно описана ниже. Больше того, пусть масса такой частицы будет равна по величине массе измеряемой частицы, хотя по знаку и противоположна,  $m_0 = -m$ . При этом предположении свободная эволюция определится соотношением

$$X(t) - X_0(t) = X(0) - X_0(0) + t[P(0) + P_0(0)]/m. \quad (1)$$

Примечание: теперь относительное положение связано с суммарным моментом  $P + P_0$ . Это важный фактор, потому что коммутируют величины  $X$  и  $P$ , т.е. имеет место коммутатор  $[X - X_0, P + P_0] = 0$ , так что их можно измерить с произвольной точностью в любой момент времени. Состояния, обладающие пониженной или даже нулевой дисперсией относительного положения и суммарного момента, представляют собой запутанное состояние двух систем и соответствуют состояниям, рассматриваемым в знаменитом аргументе Эйнштейна-Подольского-Розена о мнимой неполноте квантовой теории [26].

С целью упростить обозначения в последующем обсуждении мы будем предполагать, что переменные координаты и импульса  $X, X_0$  и  $P, P_0$  могут быть перемасштабированы так, чтобы стать безразмерными<sup>1</sup>. Следовательно, мы исходим из канонического коммутатора  $[X, P] = [X_0, P_0] = i$ , который подразумевает, что дисперсия каждой из этих канонических переменных равна  $1/2$  для состояний с минимальной некоррелированной неопределенностью. При таком соглашении степень запутанности в состоянии Эйнштейна-Подольского-Розена может быть охарактеризована так называемой ЭПР-дисперсией  $\Delta_{EPR} = \text{Var}(X - X_0) + \text{Var}(P + P_0) < 2$  [27, 28]. Сделанное чрезвычайно важное предположение об отрицательности массы одной из двух ЭПР-запутанных частиц (служащей квантовой системой отсчета) позволяет определить относительное положение с произвольной точностью в любой момент времени. Заметим, что генерация запутанного ЭПР-состояния между исследуемой частицей и эталонной частицей с регулярной положительной эффективной массой приводит к той же неопределенности относительного положения, что и в случае обычной системы отсчета (рис. 1).

Мы можем в принципе определить  $X - X_0$ , но можем ли в действительности узнать относительное положение, не возмущая его? Как обсуждалось выше, если мы измеряем с помощью некоторых средств относительное положение  $X - X_0$ , то мы с необходимостью возмущаем сопряженную переменную, т.е.  $P - P_0$ . Но эта переменная не связана с относительным положением в более поздние моменты времени в случае эталонной частицы с отрицательной массой, см. рис. 1. Эффект обратного влияния на измерение, следовательно, не может исказить наше знание об относительном положении. При рассматриваемых здесь условиях относительное положение может, таким образом, быть установлена и измерена с любой желаемой точностью в любой момент времени, поскольку относительное положение есть все, что нам требуется, чтобы сделать вывод о возможности узнать квантовые траектории без квантовых неопределенностей.

Рассмотрим теперь повторяющееся или непрерывное во времени измерение относительного положения  $X - X_0$ . Если шум от обратного влияния исключен, то воздействие измерительного устройства может быть бесконечно увеличено и, следовательно, вклад шума от измерительного устройства может быть стать пренебрежимо малым. В этом случае относительная координата и импульс для обоих осцилляторов могут быть измерены произвольно точно. Точность этого измерения дается условием запутывания  $\text{Var}(X - X_0) + \text{Var}(P + P_0) < 2$ . Равенство, достигнутое для некоррелированных систем в чистом состоянии, соответствует двум единицам вакуумного шума  $\text{Var}(X - X_0) = \text{Var}(P + P_0) = 1$ . Этот критерий точно соответствует оптимальному, достижимому в общепринятом случае, с неустранимым обратным воздействием измерения: там оптимальный баланс между измерительным прибором и шумом от обратного воздействия, достигаемый в стандартном квантовом пределе, равен единице вследствие системной неопределенности, причем половина единицы обусловлена неопределенностью измерительного прибора, а другая половина – обратным воздействием на измерение, т.е. всего две единицы вакуумного шума [29, 30]. В схеме устранения обратного влияния, предлагаемой здесь, запутывание, таким

<sup>1</sup> В случае, когда обе системы являются гармоническими осцилляторами с данной частотой  $\omega$  безразмерные канонические координаты могут быть естественно введены с помощью перемасштабирования флуктуаций координат и импульсов относительно нулевых колебаний  $x_{ZPF} = \sqrt{\hbar/m\omega}$  и  $p_{ZPF} = \sqrt{\hbar m\omega}$ .

образом, необходимо и достаточно для измерений за рамками стандартного квантового предела (SQL).

### Траектории без шума для осцилляторов

Та же логика, которая обсуждалась для свободных частиц, применима также и к осцилляторам. Временная динамика гармонического осциллятора дается соотношением  $X(t) = X(0) \cos(\omega t) + P(0) \sin(\omega t)$  и  $P(t) = P(0) \cos(\omega t) - X(0) \sin(\omega t)$ , где снова обращаемся к безразмерным переменным координаты и импульса. Снова точное знание величины  $X(0)$ , соответствующей сжато состоянию осциллятора при  $t = 0$  приводит к траектории, которая очень зашумлена при  $t \neq 2\pi/\omega, 4\pi/\omega \dots$  вследствие квантового шума из-за обратного влияния на измерение  $X(0)$ , оказываемого  $P(0)$ . Как и для свободной частицы, ЭПР-состояние, запутанное между интересующим нас осциллятором и эталонным осциллятором приводит к траектории без шума, обеспеченной благодаря тому, что эталонный осциллятор имеет отрицательную эффективную массу. Действительно, в этом случае

$$X(t) - X_0(t) = [X(0) - X_0(0)] \cos(\omega t) + [P(0) + P_0(0)] \sin(\omega t).$$

Коммутирующие операторы  $X(0) - X_0(0)$  и  $P(0) + P_0(0)$  могут быть установлены точно и, следовательно,  $X(t) - X_0(t)$  также могут быть точно установлены в любой момент времени.

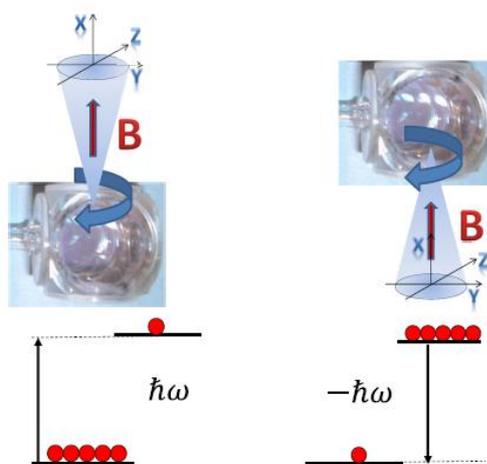


Рисунок 2. Коллектив спиновых осцилляторов с эффективными положительной и отрицательной массами. Ансамбль слева поляризован вдоль направления магнитного поля. Возбуждение ансамбля от полностью поляризованного состояния соответствует прецессии спина в поле с положительной магнитной энергии. Ансамбль справа поляризован в противоположном направлении, и его возбуждение соответствует прецессии с отрицательной магнитной энергией, т.е. с эффективной отрицательной массой.

В качестве специфического примера двух запутанных осцилляторов, один из которых характеризуется отрицательной массой, мы предлагаем иллюстрацию в терминах магнитных осцилляторов, реализованных в виде атомных ансамблей. Рассмотрим два коллектива магнитных моментов (спинов) атомных ансамблей

[31] в магнитном поле, см. рис. 2. Один из осцилляторов ориентирован вдоль В-поля и, следовательно, прецессирует по часовой стрелке, если смотреть вдоль его собственной средней ориентации  $J_{x1} = J_x$  (верхняя часть рисунка) с ларморовой частотой  $\omega$ , так что  $J_{y1}(t) = J_{y1}(0) \cos(\omega t) + J_{z1}(0) \sin(\omega t)$  и  $J_{z1}(t) = J_{z1}(0) \cos(\omega t) - J_{y1}(0) \sin(\omega t)$ . Для атомов с положительным  $g$ -фактором такое вращение соответствует положительной магнитной энергии. Другой спин ориентирован противоположно В-полю и, следовательно, прецессирует против часовой стрелки, если смотреть вдоль его ориентации  $J_{x2} = -J_x$  (внизу на рисунке), так что  $J_{y2}(t) = J_{y2}(0) \cos(\omega t) - J_{z2}(0) \sin(\omega t)$  и  $J_{z2}(t) = J_{z2}(0) \cos(\omega t) + J_{y2}(0) \sin(\omega t)$ . Такое вращение приводит к отрицательной магнитной энергии и может быть формально получено из выражения для первого спина переменной знака у частоты  $\omega$ . Физически оба спина прецессируют против часовой стрелки, если смотреть вдоль общего направления В-поля, то есть в этой общей системе отсчета.

$$J_{y1}(t) + J_{y2}(t) = [J_{y1}(0) + J_{y2}(0)] \cos(\omega t) + [J_{z1}(0) + J_{z2}(0)] \sin(\omega t)$$

и

$$J_{z1}(t) + J_{z2}(t) = [J_{z1}(0) + J_{z2}(0)] \cos(\omega t) - [J_{y1}(0) + J_{y2}(0)] \sin(\omega t).$$

Из коммутационных соотношений для спина  $[J_{z1}(0), J_{y1}(0)] = -[J_{z2}(0), J_{y2}(0)] = J_x$ , где мы аппроксимировали  $J_x$  – компоненту спина вдоль оси атомной поляризации – в качестве классической переменной. Мы заключаем, что  $[J_{z1}(0) + J_{z2}(0), J_{y1}(0) + J_{y2}(0)] = 0$ . Следовательно, взаимная начальная ориентация двух коллективных спинов может быть измерена и установлена вне рамок стандартного квантового предела.

Лучшая, чем на уровне стандартного квантового предела корреляция двух спинов может быть получена на языке канонических осцилляторов, если ввести переменные  $X_1 = J_{y1}/\sqrt{J_x}$ ,  $X_2 = -J_{y2}/\sqrt{J_x}$  и  $P_1 = J_{z1}/\sqrt{J_x}$ ,  $P_2 = J_{z2}/\sqrt{J_x}$ , которые удовлетворяют каноническому соотношению коммутации  $[X_{1(2)}, P_{1(2)}] = i$  с дисперсией  $\text{Var}(X) = \text{Var}(P) = 1/2$  в минимально неопределенном состоянии, именуемом когерентным спиновым состоянием (CSS). Из вышеприведенного уравнения мы получаем  $X(t) - X_0(t) = [X(0) - X_0(0)] \cos(\omega t) + [P(0) + P_0(0)] \sin(\omega t)$ . Это соотношение подразумевает, что если запутанное состояние этих двух осцилляторов с  $\text{Var}[X(0) - X_0(0)] \rightarrow 0$  и  $\text{Var}[P(0) + P_0(0)] \rightarrow 0$  создано при  $t = 0$ , относительная каноническая координата одного осциллятора в системе отсчета другого должна иметь исчезающе малую неопределенность во все моменты времени  $\text{Var}[X(t) - X_0(t)] \rightarrow 0$ .

## Эксперимент с магнитными осцилляторами

Мы можем проиллюстрировать эффект запутывания усиленного отклонения обратного влияния, используя данные, полученные в эксперименте [15]. Рассмотрим два магнитных осциллятора, введенных выше. Вначале два ансамбля приготовлены в состоянии с минимальной неопределенностью с противоположными макроскопическими направлениями спина, как показано на рис. За. После этого радиочастотное магнитное поле прикладывается к одному из спинов-осцилляторов в течение времени  $\tau$ , так что он динамически эволюционирует, следуя траектории, указанной стрелкой, начинающейся от начальной нулевой точки. Как показано в [15], координата одного из осцилляторов

относительно другого может быть измерена квантовым неразрушающим способом, посылая импульс света через оба ансамбля. Результат измерения дает значения  $X_1 - X_2 = J_{y'}^1/\sqrt{J_x} - J_{y'}^2/\sqrt{J_x}$  и  $P_1 + P_2 = J_{z'}^1/\sqrt{J_x} - J_{z'}^2/\sqrt{J_x}$ . Результат этого эксперимента, повторенный многократно, показан слева на рис. 3b. Красная линия, начинающаяся в нулевой точке, представляет собой среднее перемещение осциллятора за время  $\tau$ . Лиловый кружок показывает стандартное отклонение распределения результатов. Это очень близко к пурпурному кружку, который представляет собой рассчитанное стандартное отклонение для спинов в состоянии с минимальной неопределенностью. Эти результаты демонстрируют измерение траектории осциллятора с неопределенностью, которая очень близка к стандартному квантовому пределу.

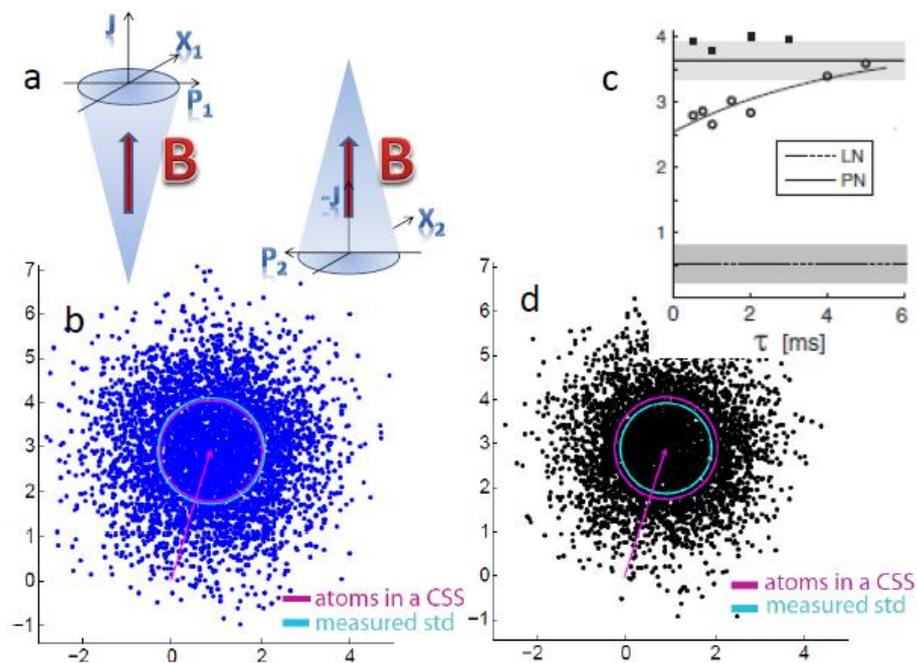


Рисунок 3. Траектория за рамками стандартного квантового предела. (a) Два магнитных осциллятора. (b) Результаты серий измерений длительностью 1 мс с эволюцией одного спина в системе отсчета другого спина, причем оба спина некоррелированы. (c) ЭПР-дисперсия запутанного состояния двух спиновых осцилляторов. (d) То же, что и в случае (b), но для запутанного состояния двух осцилляторов.

В следующем эксперименте было создано запутанное состояние между двумя осцилляторами. Фигура 3с из [15] представляет измерение ЭПР-дисперсии в функции времени, прошедшего с момента создания состояния. Сплошная горизонтальная линия соответствует проекции шума спина осциллятора. Кружки соответствуют запутанному состоянию, созданному при  $t = 0$  благодаря измерению над световым импульсом, распространяющимся через оба ансамбля. Это обеспечивает приготовление необходимого запутанного ЭПР-состояния между осцилляторами с положительной и отрицательной массами. Сразу после его создания состояние обладает ЭПР-дисперсией  $\Delta_{EPR}/2 = 0.7$ . После этого радиочастотное магнитное поле прикладывается к одному из спинов – осцилляторов в течение времени  $\tau$ , так что оно обладает той же самой классической динамикой, что и в первом эксперименте. Затем выполняется измерение  $X_1 - X_2$  и  $P_1 + P_2$ . Рисунок 3d показывает результаты этих серий

измерения траектории. Стандартное отклонение траекторий составляет 0.84 от стандартного отклонения, определенного стандартным квантовым пределом для спина, что ясно указывает на преодоление обратного влияния магнитометрии благодаря запутыванию.

Как предложено в [17], запутывание может быть создано между спином атомного осциллятора с отрицательной массой, описанной выше, и механическим осциллятором, связанных со светом радиационным давлением. В таком запутанном состоянии траектория механического осциллятора может быть измерена с точностью вне стандартного квантового предела, что было показано для двух спинов – осцилляторов.

При измерениях полей, времени, ускорения и координаты, приближающихся к квантовому пределу точности или достигающих его, удается практически устранить обратное влияние. Анализ, проведенный выше, показывает, что в принципе возможно определить траектории без квантовых неопределенностей, а также возможны измерения движения вне стандартных квантовых пределов. Представляется также, что имеется иной предел точности измерения, описанный в данной работе, по аналогии с пределом Гейзенберга и, следовательно, может быть связан с величиной  $1/N$ , где  $N$  – число частиц. Этот предел, лежащий далеко за пределами представленной технологии для макроскопических объектов, обсуждаемых здесь, будет рассмотрен в других работах.

*Благодарности.* We thank K. Jensen for making the Fig. 3. We acknowledge funding by the ERC grant INTERFACE and EU projects SIQS and iQUOEMS.

## Ссылки

- [1] V. B. Braginsky and Y. I. Vorontsov, *Sov. Phys. Usp.* 17, 644 (1975).
- [2] V. B. Braginsky, Y. I. Vorontsov, and K. S. Thorne, *Science (New York, N.Y.)* 209(4456), 547–57 (1980).
- [3] C. Caves, K. Thorne, R. Drever, V. Sandberg, and M. Zimmermann, *Reviews of Modern Physics* 52(2), 341–392 (1980).
- [4] C. Caves, *Physical Review D* 23(8), 1693–1708 (1981).
- [5] V. B. Braginsky and F.Y. Khalili, *Quantum Measurement* (1995).
- [6] R. Bondurant and J. Shapiro, *Physical Review D* 30(12), 2548–2556 (1984).
- [7] H. Kimble, Y. Levin, A. Matsko, K. Thorne, and S. Vyatchanin, *Physical Review D* 65(2), 022002 (2001).
- [8] R. Bondurant, *Physical Review A* 34(5), 3927–3931 (1986).
- [9] T. Briant, M. Cerdonio, L. Conti, A. Heidmann, A. E. Lobo, and M. Pinard, *Physical Review D* 68(10), 102005 (2003).
- [10] T. Caniard, P. Verlot, T. Briant, P. F. Cohadon, and A. Heidmann, *Physical Review Letters* 99(11), 110801 (2007).
- [11] Y. Chen, S. L. Danilishin, F.Y. Khalili, and H. M<sup>u</sup>ller-Ebhardt, *General Relativity and Gravitation* 43(2), 671–694 (2010).
- [12] K. Thorne, R. Drever, C. Caves, M. Zimmermann, and V. Sandberg, *Physical Review Letters* 40(11), 667–671 (1978).
- [13] A. A. Clerk, F. Marquardt, and K. Jacobs, *New Journal of Physics* 10(9), 095010 (2008).
- [14] J. Suh, A. J. Weinstein, C. U. Lei, E. E. Wollman, S. K. Steinke, P. Meystre, A. A. Clerk, and K. C. Schwab (December) (2013).
- [15] W. Wasilewski, K. Jensen, H. Krauter, J. J. Renema, M.V. Balabas, and E. S. Polzik, *Physical Review Letters* 104, 133601 (2010).

- [16] B. Julsgaard, A. Kozhekin, and E. S. Polzik, *Nature* 413(6854), 400–3 (2001).
- [17] K. Hammerer, M. Aspelmeyer, E. Polzik, and P. Zoller, *Physical Review Letters* 102(January), 20501 (2009).
- [18] M. Tsang and C. Caves, *Physical Review Letters* 105(12) (2010).
- [19] M. Tsang and C. M. Caves, *Physical Review X* 2(3), 031016 (2012).
- [20] K. Zhang, P. Meystre, and W. Zhang, *Physical Review A* 88(4), 043632 (2013).
- [21] M. J. Woolley and A. A. Clerk, *Physical Review A* 87(6), 063846 (2013).
- [22] M. H. Wimmer, D. Steinmeyer, K. Hammerer, and M. Heurs, arXiv:1403.2992 (2014).
- [23] D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* 76(Mar), 1796–1799 (1996).
- [24] Y. Aharonov and L. Susskind, *Phys. Rev.* 155(Mar), 1428–1431 (1967).
- [25] R. M. Angelo, N. Brunner, S. Popescu, A. J. Short, and P. Skrzypczyk, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 44(14), 145304 (2011).
- [26] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Physical Review* 47(10), 777 (1935).
- [27] L. M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Physical Review Letters* 84(12), 2722 (2000).
- [28] R. Simon, *Physical Review Letters* 84(12), 2726–2729 (2000).
- [29] K. Hammerer, M. M. Wolf, E. S. Polzik, and J. I. Cirac, *Phys. Rev. Lett.* 94(Apr), 150503 (2005).
- [30] S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, and H. J. Kimble, *Journal of Modern Optics* 47(2-3), 267–278 (2000).
- [31] K. Hammerer, A. S. Sørensen, and E. S. Polzik, *Rev. Mod. Phys.* 82(Apr), 1041–1093 (2010).