

**Редакционная заметка к статье Жоржа Лемэтра
“Однородная Вселенная постоянной массы и возрастающего радиуса,
объясняющая радиальные скорости внегалактических туманностей” (1927 г.)**

Ж.-П. Люмине (Франция)

Перевод М.Х. Шульмана (shulman@dol.ru, www.timeorigin21.narod.ru)

arXiv:1305.6470v1 [physics.hist-ph] 28 May 2013

Editorial note to “A Homogeneous Universe of Constant Mass and Increasing Radius accounting for the Radial Velocity of Extra-Galactic Nebulae” by Georges Lemaitre (1927)

Jean-Pierre Luminet, Laboratoire Univers et Theories
Observatoire de Paris - CNRS UMR8102 - Universite Paris Diderot (France)
email : jean-pierre.luminet@obspm.fr
May 29, 2013

Аннотация

Это – редакционная заметка к новой публикации в “Золотой Серии” журнала “General Relativity and Gravitation”¹ фундаментальной статьи Жоржа Лемэтра, первоначально опубликованной на французском языке в 1927 году². В ней автор дал первое объяснение наблюдаемому разбеганию галактик как естественному следствию динамических космологических решений полевых уравнений Эйнштейна и открыл так называемый закон Хаббла. Мы подробно анализируем научное содержание этой знаменитой работы, описываем, каким образом она оставалась непрочитанной или недооцененной до 1930 года, и перечисляем и объясняем различия между версиями 1927 и 1931 годов. Действительно, английский перевод, опубликованный в 1931 в M.N.R.A.S.³, не был идеально идентичным оригинальному тексту – он был изменен. Как совсем недавно выяснилось, эти изменения были сделаны самим Лемэтром, но несоответствия между двумя текстами, вызвали было некоторые споры между историками. Наш новый перевод точно следует версии 1927 года².

Введение

Как уже указывалось в предшествующей публикации “Золотой Серии”, посвященной короткой заметке Лемэтра 1931 года (она может рассматриваться как настоящая хартия современной теории Большого Взрыва [1]), хотя бельгийский ученый прежде всего был замечательным математиком и физиком-теоретиком, он всю свою жизнь был тесно связан с астрономией и всегда чувствовал необходимость сравнивать наблюдательные данные с общей теорией относительности. Этот основной факт объясняет, почему с 1927 года, будучи еще новичком в космологии, он стал первым, кто оказался способным

¹ См. <http://www.mth.uct.ac.za/~cwh/goldies.html>.

² См. полный русский перевод http://timeorigin21.narod.ru/rus_translation/Lemaitre_1927_rus.pdf.
Новый английский перевод приведен в приложении к публикуемой статье:
<http://arxiv.org/pdf/1305.6470v1.pdf> - МХШ.

³ Monthly Notices of the Royal Astronomical Society (M.N.R.A.S.) является одним из ведущих в мире научных журналов по астрономии и астрофизике.

понять недавние наблюдения, относящиеся к скоростям разбегания галактик, как естественное следствие динамических космологических решений полевых уравнений Эйнштейна⁴.

Перед тем, как подробно изучить содержание его выдающейся статьи, охарактеризуем путь, который в течение нескольких предшествующих лет привели юного Лемэтра к идее расширяющейся вселенной (см., например, [6]).

В 1923 году, т.е. тогда же, когда он был посвящен в духовный сан, Жорж Лемэтр получил 3-летнюю стипендию от бельгийского правительства, позволившую ему учиться за границей. Первый год он провел в английском университете в Кембридже, где изучал астрономию звезд, релятивистскую космологию и числовой анализ под руководством Артура Эддингтона. Вторым годом он провел в обсерватории гарвардского колледжа в Кембридже, Массачусетс (Harvard College Observatory in Cambridge, Massachusetts), руководимой Харлоу Шепли (Harlow Shapley), который работал над проблемой туманностей. Затем он направился в Массачусетский Технологический Институт (МТИ), где работали Эдвин Хаббл (Edwin Hubble) и Весто Слайфер (Vesto Slipher). Первый измерил расстояния до туманностей, наблюдая переменные звезды - цефеиды, а второй оценил их радиальные скорости, основываясь на спектральных смещениях.

Вплотную основываясь пока еще на экспериментальной работе американских астрономов, которые вскоре пришли к наблюдательной космологии, Лемэтр защитил докторскую диссертацию (PhD thesis) в МТИ под руководством своего соотечественника Поля Хеймана (Paul Heymans) по гравитационному полю жидкостей в общей теории относительности – теоретической теме, предложенной Эддингтоном. В конце 1924 года он участвовал во встрече в Вашингтоне, ставшей знаменитой после открытия цефеид в спиральных туманностях; об этом объявил на ней Эдвин Хаббл. Это позволило доказать существование галактик, внешних по отношению к нашей собственной галактике, и Лемэтр понял, что это новая конструкция “островных вселенных” должна иметь радикальные последствия для теоретической релятивистской космологии.

В июле 1925 года его американская командировка закончилась, и Лемэтр должен был вернуться назад в Бельгию. В том же, решающем для наблюдательной космологии году, Лемэтр получил свои первые знаменитые научные результаты, относящиеся к космологическому решению, найденному де Ситтером [7]. В первой статье [8] он показал, как можно ввести новые координаты для вселенной де Ситтера, которые больше не делали метрику статичной, соответствовали нулевой кривизне и масштабному фактору, экспоненциально зависящему от времени. Эта метрика была использована двадцать лет спустя злейшими противниками теории расширяющейся вселенной в контексте “стационарных” моделей [9], и еще позже, в 1980-х, для описания гипотетической инфляционной фазы в ранней вселенной, см., например, [10]. Во второй статье [11] он вывел тот факт, что соотношение между относительной скоростью пробных частиц и их взаимным расстоянием во вселенной де Ситтера было линейным. Впервые было показано, что космологическая константа (когда она положительна) представляет собой фактор “космического отталкивания”, вынуждающего мировые линии частиц расходиться с течением времени. Однако, хотя он установил, что это нестатическое свойство является перспективным в связи с красными смещениями туманностей, он также заключил, что результирующая модель соответствует бесконечному евклидовому пространству, что он считал недопустимым: будучи неотомистом, он отвергал реальную

⁴ Ряд других авторов, таких, как Герман Вейль [2], Карл Вирц [3], Людвиг Зильберштейн [4], Кнут Лундмарк [5] искали соотношение, которое соответствовало статической модели де Ситтера с *фиктивными* радиальными скоростями.

бесконечность и оставался уверенным в конечности пространства и материи в течение всей своей жизни. Таким образом, он должен был искать альтернативное объяснение, основанное на истинно нестатическом и пространственно замкнутом решении уравнений Эйнштейна.

В 1926-27 г.г. Лемэтр снова приехал в Соединенные Штаты, где оставался в МТИ в течение трех кварталов академического года. Вернувшись в Европу в июне 1927 года, он был проинформирован письмом, что ему присвоена степень PhD [12], ранее полученная им на основании устной защиты. В том же году он получил степень профессора в университете в Лувене и опубликовал свою великую статью о расширяющейся вселенной.

Разбегание галактик и расширяющаяся вселенная

С 1912 Весто Слайфер осуществлял программу измерений радиальных скоростей спиральных туманностей. Истолкованные в терминах эффекта Доплера, сдвиги по частоте (или длине волны) отвечают радиальным скоростям перемещения источника относительно наблюдателя.

Таким образом, радиальные скорости косвенно измеряются с помощью спектроскопии. В 1917 году Слайфер (см. [13] и приведенную там библиографию) проанализировал спектры 25 спиральных туманностей, которые он наблюдал в обсерватории Ловелла, Флагстафф, Аризона; 21 из них обладала красными смещениями, которые могли быть интерпретированы на основе регулярного разбегания (исключения – это M81 и 3 галактики Местной Группы). Однако никто еще не подозревал, что эти предварительные данные скоро составят основу всей космологии, в основном потому, что выльются в дискуссию – являются ли спиральные туманности островными вселенными. Подтверждение красных смещений было получено в основном благодаря усилиям Слайфера, и к 1923 году таких было выявлено 36 из 41 спиральной туманности.

Слайфер никогда не публиковал своего окончательного списка⁵, но он был приведен в книге Артура Эддингтона 1923 года [15], отметившего, что “одной из наиболее трудноразрешимых проблем в космогонии является огромная скорость спиральных туманностей. Их радиальные скорости в среднем составляет около 600 км/с, и существует большое преобладание скоростей разбегания относительно солнечной системы”. Влиятельный британский астроном предположил, что должны наблюдаться эффекты, вызванные кривизной пространства-времени, и, возможно, для их объяснения может быть привлечена модель де Ситтера.

Благодаря своим поездкам в Кембридж (Англия) и МТИ (где он лично встречался со Слайфером), Лемэтр был прекрасно информирован об этих предварительных результатах и стремился учитывать доступные данные при использовании новых космологических решений уравнений Эйнштейна.

Как ясно свидетельствует заголовок его статьи 1927 года, Лемэтр оказался способен связать расширение пространства, естественным образом возникающее из нестатических космологических решений общей теории относительности, с наблюдаемыми скоростями разбегания внегалактических туманностей.

Он начинает с анализа дилеммы между моделями вселенной де Ситтера и Эйнштейна. Модель де Ситтера игнорировала существование материи; однако она давала скорости разбегания спиральных туманностей в качестве простого следствия гравитационного поля. Решение Эйнштейна допускало наличие материи и приводило к связи между плотностью материи и радиусом

⁵ Подробности см. в [14].

пространства – в предположении существования положительно искривленной гиперсферы; будучи строго статичным вследствие подбора космологической константы, оно, однако, не могло объяснить разбегание галактик. Лемэтр, таким образом, искал новое решение релятивистских уравнений, сочетающее преимущества моделей Эйнштейна и де Ситтера и лишенное их недостатков, т.е. соответствующее наличию материи и, в то же время, объясняющее скорости разбегания.

Для этого в следующем разделе он предположил наличие положительно искривленного пространства (как более точно сказано в сноске, с “эллиптической топологией”, а именно, с топологией проективного пространства P^3 , полученного отождествлением точек-антиподов просто связанной гиперсферы S^3 ; см. [16] для объяснения такого выбора) с радиусом кривизны R (и, следовательно, плотностью материи ρ), который является функцией времени t , и с ненулевой космологической константой λ . Из полевых уравнений Эйнштейна он получил дифференциальные уравнения (уравнения (2)-(3)) для $R(t)$ и $\rho(t)$, в основном идентичные с теми, которые ранее получил Фридман [17] (тогда Лемэтр еще не знал о работе Фридмана, см. ниже). Разница состояла в том, что Лемэтр предположил сохранение энергии (уравнение (4)) – это было первым случаем введения термодинамики в релятивистскую космологию – и включил давление излучения наряду с плотностью материи в тензор энергии-натяжений (он справедливо рассматривал давление материи пренебрежимо малым). Лемэтр подчеркивал важность давления излучения на первых стадиях космического расширения.

Сейчас хорошо известно, что в рамках концепции моделей большого взрыва приближение нулевого давления действительно только спустя приблизительно четыреста тысяч лет после большого взрыва. Подобно Эйнштейну и де Ситтеру, и Фридман ввел допущение, что член давления в тензоре энергии-напряжений всегда был равен нулю. Уравнения, выведенные Лемэтром, были, таким образом, более общими и реалистичными.

Лемэтр показал, каким образом модели Эйнштейна и де Ситтера оказываются частными решениями общих уравнений. Далее он выбирает в качестве начальных условий $R' = R'' = 0, R = R_0$ при $t = -\infty$ и уточняет значение космологической константы $\lambda = 1/R_0$, так же как Эйнштейн уточнил значение λ в своей статичной модели с постоянным радиусом.

Как следствие, полученное им в уравнении (30) точное решение описывает монотонно расширяющуюся вселенную, которая в бесконечной ретроспективе асимптотически приближается к статическому решению Эйнштейна, тогда как в перспективе она асимптотически приближается к экспоненциально расширяющейся вселенной де Ситтера.

Эта модель, не содержащая начальной сингулярности и, следовательно, не обладающая конечным возрастом – так же, как “монотонное решение вторых компонент”, найденное ранее Фридманом – будет позднее названа моделью Эддингтона-Лемэтра (см. ниже). Лемэтр не приводит график для $R(t)$, но дает численные значения в таблице при $t = -\infty$ to $+\infty$. Для ясности такой график построен на нашем рис. 1.

Лемэтр рассматривал статическую Вселенную Эйнштейна как своего рода пред-вселенную, из которой произошло расширение вселенной в результате неустойчивости. Физической причиной для расширения он полагал само по себе давление излучения вследствие его начального накопления в замкнутой статической вселенной, но он не развивал эту (ошибочную) идею.

Отдавая предпочтение этой частной идее в своей статье, Лемэтр никогда отдельно не рассчитывал в целом динамические однородные космологические

решения, поскольку он имел общую формулу (уравнение (11)), дававшую ему возможность вычислить время эволюции всех однородных изотропных моделей с положительной кривизной. Архивы Лемэтра в университете Лувена хранят красный пакет с надписью “1927” с гранками доказательств для его статьи, некоторые рукописные заметки к ней и две диаграммы, которые (к сожалению) никогда не появлялись в его публикациях. Эти диаграммы изображают время эволюции пространственного масштабного фактора, зависящее от значения космологической константы для всех однородных и изотропных решений уравнений Эйнштейна с положительной пространственной кривизной.

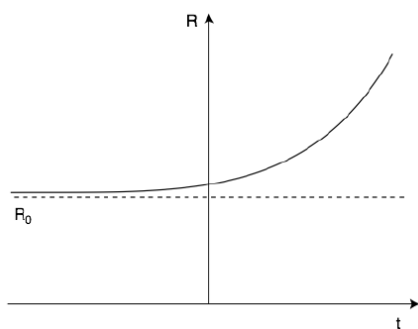


Рисунок 1: Модель вселенной Лемэтра 1927 года, позже названная моделью Эддингтона-Лемэтра. Радиус R_0 статической гиперсферы Эйнштейна дается асимптотой при $t = -\infty$. Начало космического времени выбирается произвольно, таким образом, модель не решала проблему возраста.

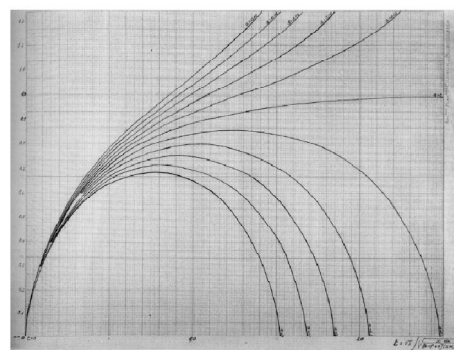


Рисунок 2: Собственноручный рисунок Лемэтра. Эта необычная диаграмма, нарисованная в 1927 году, но оставшаяся неопубликованной до 1998 года [20], изображает время эволюции радиуса вселенной в зависимости от значения космологической константы (обозначенной через α) для пространства положительной кривизны. Все модели начинаются из сингулярности в точке $(x = 0; t = 0)$. Для достаточно большой космологической константы α вселенная становится открытой. Самые последние космологические данные совместимы с решением Лемэтром для положительной кривизны и ускоренного расширения (верхняя кривая).

Как уже упоминалось выше, статья 1927 года не ссылалась на работу Фридмана, опубликованную в “Zeitschrift fur Physik” – хотя в то время это был один из наиболее известных журналов в области теоретической физики. Этот факт кажется странным, если вспомнить две заметки Эйнштейна, опубликованные в том же выпуске [18], которые широко обсуждались в научном сообществе. Правдоподобное объяснение состоит в том, что Лемэтр не знал немецкого языка [19]. На статьи Фридмана обратил внимание Лемэтра сам Эйнштейн во время их встречи в 1927 г. на Сольвеевском конгрессе. Таким образом, ссылка на Фридмана впервые появилась в статье 1929 г. “Размер пространства (La grandeur de l'espace)” [21], написанной по-французски, где Лемэтр благодарит “м-ра Эйнштейна за доброжелательность, с которой он указал мне на важную работу Фридмана; она включала некоторые результаты моей заметки относительно

однородной вселенной”. Эта ссылка появилась также в 1931 году в английском переводе статьи Лемэтра, см. ниже.

Исключительный интерес к работе Лемэтра обеспечивался первой интерпретацией космологических красных смещений как естественного следствия расширения вселенной в рамках общей теории относительности, а не обычного движения галактик: как написано внизу в уравнении (23), пространство постоянно расширяется и, следовательно, растет видимое расстояние между галактиками. Эта идея оказалась одним из наиболее глубоких открытий нашего времени.

Соотношение пропорциональности (23) между скоростью взаимного удаления и расстоянием является приближением, действительном при не очень больших расстояниях, которые могут использоваться “в пределах видимого спектра”. Затем, используя доступные астрономические данные, Лемэтр дает явное соотношение пропорциональности в уравнении (24), с коэффициентом 625 или 575 км/с/Мпк, зависящим от его выбора наблюдений, дающих огромный разброс. Это – первое определение так называемого закона Хаббла (и постоянной Хаббла), который можно также называть законом Лемэтра.

Для этого бельгийский ученый использовал список из 42 радиальных скоростей, который составил Густав Штрюмберг (Gustav Strömberg), шведский астроном из обсерватории Маунт Вильсон⁶, и вывел их расстояния из недавней эмпирической формулы между расстоянием и абсолютной величиной, полученной Хабблом [23], который сам взял их из работы Хопмана (Hoppmann) [24]. Возможно, Лемэтр был способен дать численные рисунки для начального и текущего значений радиуса вселенной, соответственно, $R_0 = 2,7 \times 10^8$ пк и $R = 6 \times 10^9$ пк. В самом конце он указывает, что наибольшая часть вселенной всегда будет за пределами видимого спектра, поскольку наибольшее расстояние, доступное для телескопа в Маунт Вильсон, составляет только $R/120$, тогда как только для расстояний больше чем $R/11,5$ весь видимый спектр смещается в инфракрасную область – он не мог себе представить эпоху с инфракрасными и субмиллиметровыми телескопами, установленными на спутниках.

Выше мы видели, что Лемэтр уже знал все решения уравнений Эйнштейна для однородных и изотропных вселенных. Причина, по которой он предпочел сугубо частную модель, уточняя космологическую константу с целью избежать начального значения времени, обусловлена его переоценкой константы Хаббла: как хорошо известно, последняя дает порядок величины длительности фазы расширения; при оценке примерно в 600 км/с/Мпк, полученной Лемэтром, этот период времени составляет всего лишь около одного миллиарда лет, эта величина меньше возраста Земли, установленного геологами в то время. Таким образом, модель с экспоненциальным расширением и без начального момента позволяла примирить теорию как с астрономическими, так и с геологическими данными.

Первые отклики

Работа Лемэтра оставалась незамеченной в течение трех лет, частично (хотя и не только по этой причине) из-за того, что она была опубликована на французском языке в “малоизвестном и практически недоступном журнале”, как иногда отмечалось [25], а не в престижных астрономических журналах того времени⁷. Как правильно указывал Ламбер (Lambert) [26], журнал *Annales de la*

⁶ Сам Штрюмберг [22] ссылался на красные смещения, измеренные Слайфером, и включил некоторые шаровые скопления дополнительно к спиральным туманностям.

⁷ Эта статья была перепечатана позже в 1927 г. в томе 4 “Publications du Laboratoire d’Astronomie et de Geodesie” университета Лувена, еще менее предназначенного для широкого распространения.

Societe Scientifique de Bruxelles публиковал некоторые статьи на английском, характеризовался блестящим научным уровнем и, следовательно, был представлен во многих академических библиотеках и обсерваториях по всему миру; да и по-французски читало гораздо больше ученых, чем сейчас. В действительности главным препятствием для распространения статьи Лемэтра было то, что большинство физиков того времени, таких, как Эйнштейн и Хаббл, не могли принять идею нестационарной вселенной. Не так было с Эддингтоном; к несчастью, его первый научный руководитель, которому Лемэтр послал копию, то ли забыл о ней на время, то ли не понял ее важности.

С 24 по 29 октября 1927 года в Брюсселе проходил Пятый Сольвеевский конгресс по физике, одна из важнейших встреч в научном мире. Этот Сольвеевский конгресс был посвящен новой дисциплине – квантовой механике, проблемы которой волновали многих физиков. Среди них был Эйнштейн. Для Лемэтра это было возможностью подискутировать с отцом общей теории относительности. Позднее он сам рассказывал об этой встрече:

“Прогуливаясь по аллеям Парка Леопольда, [Эйнштейн] говорил мне о мало замеченной статье (которую я написал в прошлом году) относительно расширения вселенной, которую дал ему прочесть один друг. После некоторых поощрительных замечаний он закончил, сказав, что с физической точки зрения ему это кажется совершенно неприемлемым. Когда я заговорил о продолжении обсуждения, Огюст Пикар (Auguste Piccard), который его сопровождал, пригласил меня в такси вместе с Эйнштейном, направлявшимся в его университетскую лабораторию в Брюсселе. В такси я говорил о скоростях туманностей, и у меня создалось впечатление, что Эйнштейн был хорошо осведомлен об астрономических фактах. В университете каждый начинал говорить по-немецки” [27].

Ответ Эйнштейна Лемэтру показывает то же нежелание менять свое мнение, которое характеризовало его первый ответ Фридману (см., например, [28]): он принимал математические построения, но не физически расширяющуюся вселенную!

В 1928 г. Робертсон (H. P. Robertson) опубликовал статью [29], в которой предложил заменить метрику де Ситтера на “математически эквивалентную ей, в которой многие кажущиеся парадоксы [решения де Ситтера] устраняются”. Он получил формулу $v = cd/R$, где d – расстояние до туманности, а R – радиус кривизны вселенной, но в контексте стационарного решения. Робертсон использовал тот же набор данных наблюдений⁸, что и Лемэтр, а также Хаббл годом позже. Отсюда он вычислил $R = 2 \times 10^{27}$ см и константу пропорциональности 464 км/с/Мпк (что он не вычислил, см. рисунок в [30]). Главное достоинство работы Робертсона (см. также [31]) состоит в том, что он был первым, кто подробно исследовал все математические модели, удовлетворяющие пространственно однородным и изотропным моделям вселенной – которые требуют сильных симметрий в решениях уравнений Эйнштейна.

В 1929 году Хаббл [32] использовал экспериментальные данные по доплеровским красным смещениям, в основном полученные Слайфером (на которого он не сослался), и установил линейное соотношение между скоростью и расстоянием $v = Hr$ со значением $H = 465 \pm 50$ км/с/Мпк для 24 объектов и 513 ± 60 км/с/Мпк для 9 групп. Этот закон в точности соответствовал закону Лемэтра (уравнение (24)) с тем же коэффициентом пропорциональности, однако

⁸ Он не знал о статьях Лемэтра 1925 и 1927 годов.

Хаббл не сослался на модели расширяющейся вселенной. Он писал: “Выявленное свойство, однако, возможно означает, что соотношение скорость-расстояние соответствует эффекту де Ситтера”. В действительности Хаббл никогда не читал статью Лемэтра; он интерпретировал красные смещения галактик как чистый эффект Доплера (обусловленный радиальными скоростями галактик), а не как эффект пространственного расширения. И в течение всей жизни он скептически относился к общерелятивистской интерпретации своих наблюдений. Например, на 202 страницах своей книги 1936 года “Мир туманностей (The Realm of the Nebulae)” [33], он попытался дать теоретическую интерпретацию только в коротком заключительном абзаце на странице 198, где он цитирует Эйнштейна, де Ситтера, Фридмана, Робертсона и Милна. Как указывал его биограф Христиансон (G. Christianson), Хаббл осторожно относился ко “всем теориям космического расширения еще долго после того, как большинство астрономов и физиков его признали. Когда его об этом спрашивали позднее (в 1937 г.), отвечал, как недоверчивый школьник: ‘Да, возможно все туманности разбегаются таким особенным образом. Но это все очень странно’ [34]. На самом деле тот факт, что расширение вселенной было открыто Хабблом, – это миф, который впервые распространили его сотрудник Хьюмасон вскоре в 1931 (см., например, [35]) и сам Хаббл, который был ярым патриотом; в письме де Ситтеру от 21 августа 1930 года он писал: “Я рассматриваю соотношение скорость-расстояние, его формулировку, проверку и подтверждение как заслугу Маунт Вильсон, и я убежден, что так это всеми и признается” (цитируется по [36]).

Спустя месяц после статьи Хаббла в гонку по поиску объяснения скоростей разбегания включился Толмен (Tolman), но он все еще исходил из идеи статического решения [37], как он сказал: “корреляция между расстоянием и наблюдаемыми скоростью разбегания внегалактических туманностей, установленная Хабблом, а также недавние измерения эффекта Доплера для очень далекой туманности, выполненные Хьюмасоном в обсерватории Маунт Вильсон, побуждают рассмотреть дополнительные теоретические соотношения между расстоянием и эффектом Доплера, которых можно ожидать из вида линейного элемента для вселенной, предложенного Де Ситтером”. Годом позже Толмен опубликовал другую статью [38], где он предположил, что расширение обусловлено преобразованием материи в излучение, т.е. выдвинул идею, предложенную Лемэтром в его статье 1927 года, опять-таки без ссылки на Лемэтра.

Новая возможность для признания модели Лемэтра появилась в 1930 году. В январе в Лондоне на заседании Королевского астрономического общества состоялась дискуссия между Эддингтоном и де Ситтером. Они не знали, как интерпретировать данные по скоростям разбегания галактик. Эддингтон высказал предположение, что проблема могла возникнуть вследствие использования лишь статических моделей вселенной, которые до тех пор только и рассматривались; он прекрасно сформулировал ситуацию следующим образом: “Должны ли мы допустить немного динамики в мир Эйнштейна с инертной материей, или немного материи в пустой мир де Ситтера (Shall we put a little motion into Einstein's world of inert matter, or shall we put a little matter into de Sitter's *Primum Mobile*?)” [39], и призвал к новым исследованиям для объяснения скоростей разбегания на основе динамических моделей пространства.

Прочитав отчет о заседании в Лондоне, Лемэтр понял, что Эддингтон и де Ситтер ставят проблему, которую он решил тремя годами ранее. Тогда он написал Эддингтону, чтобы напомнить ему о своем сообщении 1927 года, и попросил его передать копию де Ситтеру: “Дорогой Профессор Эддингтон, я только что прочитал февральский номер *Observatory* и Ваше предложение относительно исследований нестатических решений, промежуточных между

решениями Эйнштейна и де Ситтера. Я выполнил такие исследования два года назад. Я рассматриваю вселенную постоянной кривизны в пространстве, но возрастающей во времени. И я показываю существование решения, при котором движение туманностей оказывается всегда связанным с разбеганием по мере течения времени от минус до плюс бесконечности”⁹. Лемэтр уточнил: “У меня был случай поговорить об этом с Эйнштейном два года назад. Он сказал мне, что эта теория правильна, и имела все предпосылки быть выполненной, что она не была новой, поскольку ее рассматривал Фридман; он вначале критиковал работу последнего, но потом был вынужден отозвать свои возражения; однако с физической точки зрения она была `совершенно неприемлемой (tout a fait abominable)` ” (цитируется в [40]).

Британский астрофизик был одним из наиболее выдающихся деятелей науки того времени и занимал наилучшую возможную должность, чтобы сыграть ключевую роль в признании результатов Лемэтра. На этот раз он уделил внимание вкладу Лемэтра и переслал копии де Ситтеру в Голландию и Шепли (H. Shapley) в США. Эддингтон отчасти чувствовал себя сконфуженным.

Дж. МакВитти (George McVittie), который в это время был аспирантом Эддингтона, работавшим вместе с ним над устойчивостью статической модели Эйнштейна, писал: “[я вспоминаю] день, когда Эддингтон, как бы чувствую себя пристыженным, показал мне письмо от Лемэтра, который напомнил Эддингтону о полученном им ранее решении проблемы. Эддингтон признал, что хотя он видел статью Лемэтра в 1927 году, он совершенно забыл о ней вплоть до настоящего момента” (цитируется в [40]).

19 марта Эддингтон сопроводил извещение о статье Лемэтра де Ситтеру в Лейден следующим комментарием: “В связи с отчетом с Вашими и моими замечаниями [на заседании Королевского астрономического общества] Лемэтр написал мне об этом. Как раз тогда мы с моим аспирантом МакВитти были заняты этой проблемой и достигли значительного прогресса; таким образом, для нас стало неожиданностью узнать, что эта проблема была решена Лемэтром значительно более полно (эта неожиданность ослабла, как только я вспомнил, что Лемэтр был моим студентом)” (сообщается в [41]).

Де Ситтер ответил Лемэтру очень благожелательно письмом от 25 марта 1930 года, а бельгийский физик, в свою очередь, ответил ему 5 апреля (эти письма полностью приведены в [42]). В конце мая де Ситтер опубликовал дискуссию относительно расширения Вселенной [43], где он написал: “Динамическое решение уравнений (4) с линейным элементом (5) (7) и тензором энергии-материи (6) дано д-ром Лемэтром в статье, опубликованной в 1927 году, которая, к сожалению, ускользнула из поля моего зрения, пока профессор Эддингтон не привлек к ней мое внимание несколько недель назад.”

Со своей стороны, Эддингтон переработал свое сообщение для следующего заседания Королевского астрономического общества в мае, чтобы представить вниманию мировой общественности работу Лемэтра [44]. Затем он опубликовал важную статью [45], в которой он заново исследовал статическую модель Эйнштейна и открыл, что, подобно балансирующему карандашу, она была нестабильной: любое легкое возмущение равновесия могло привести к росту радиуса гиперсферы; таким образом, он адаптировал модель Лемэтра расширяющейся вселенной – которая с этих пор зовется моделью Эддингтона-Лемэтра – и вычислил начальный радиус вселенной Эйнштейна, равный примерно 1200 миллионов световых лет, т.е. того же порядка величины, что и оценка Лемэтра 1927 года. Достаточно интересно, что Эддингтон также

⁹ Из копии, сохраненной в Архиве Лемэтра в Louvain-la-Neuve, цитируется в [26].

рассматривал возможность начальной вселенной с массой M , большей или меньшей массы M_E в модели Эйнштейна, но отбросил оба эти решения, аргументируя тем, что при $M > M_E$ “похоже, требуется внезапное и специфическое начало вещей”, тогда как при $M < M_E$ “дата начала вселенной оказывается недопустимо близкой”.

Возможно, Эддингтон содействовал английскому переводу статьи Лемэтра 1927 года для публикации в *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* [46].

В это время при поддержке Эддингтона и де Ситтера Лемэтр внезапно превратился в видного новатора в науке. Он был приглашен в Лондон с целью принять участие в заседании Британской ассоциации по отношениям между физической наукой и спиритуализмом. Но при этом он достиг значительного прогресса в своих исследованиях релятивистской космологии и, вместо продвижения своей модели 1927 года, стал развивать идею вселенной, расширяющейся из начальной точки, которую он назвал “Первичный Атом (Primeval Atom)”. Так космология испытала второй парадигмальный сдвиг [47].

Английский перевод и расхождения

Много было написано на тему о том, кто фактически открыл расширяющуюся вселенной [48]. Французский астроном Поль Кудер (Paul Couderc) [49] был, вероятно, первым, кто отчетливо подчеркнул приоритет Лемэтра по отношению к Хабблу, но, поскольку сам Лемэтр никогда не заявлял о своем приоритете (см. подробности в [50]), это никогда особенно не осуждалось.

Любопытные расхождения между оригинальной французской статьей и ее английским переводом уже цитировались различными авторами (например, [40-42]): важный абзац, обсуждающий наблюдательные данные и уравнение (24), где Лемэтр дал соотношение пропорциональности между скоростью разбегания и расстоянием (в котором содержалось определение постоянной, позже получившей имя Хаббла) был заменен единственной фразой: “На основе анализа доступных данных мы принимаем $R'/R = 0,68 \times 10^{-27} \text{ см}^{-1}$ ”. Было сочтено странным, что решающие абзацы, связанные с законом Хаббла, были упомянуты мельком, и что либо вследствие ошибки Эддингтона¹⁰, либо по другим загадочным причинам Лемэтр никогда не воспринимался в качестве первооткрывателя расширения вселенной. Де-факто Лемэтр был забыт, и большинство учебников объявляют первооткрывателем расширяющейся вселенной Хаббла, хотя тот никогда не верил в подобное объяснение [51].

Неожиданно в 2011 году возник всплеск упреков в адрес Хаббла, связанных с подозрением, что имело место либо цензура перевода Лемэтра со стороны редактора M.N.R.A.S. [52], либо давление на редактора со стороны самого Хаббла [36] – подозрение базировалось на “сложной личности” Хаббла, который страстно желал быть признанным в качестве человека, определившего постоянную Хаббла.

Недоразумение было устранено Марио Ливьо (Mario Livio) из Space Telescope Institute [53] с помощью архива Лемэтра в Лувене и архивов Королевского астрономического общества (см. также дополнительные подробности в [26]). В задачи данной заметки не входит давать разъяснения по поводу этой проблемы, достаточно сказать – теперь точно установлено, что Лемэтр лично перевел свою статью и сам решил удалить некоторые абзацы и примечания без какого-либо внешнего давления. Напротив, его поощряли

¹⁰ До самого последнего времени личность переводчика не была установлена, все склонялись к тому, что перевод выполнил сам Эддингтон.

добавить свои комментарии; но бельгийский ученый, действительно имевший новые идеи, предпочел опубликовать их в отдельной статье, в том же выпуске M.N.R.A.S. [54].

В настоящей заметке гораздо интереснее подробно перечислить все несоответствия – эта скромная работа, насколько нам известно, никогда ранее не делалась – для лучшего понимания того, как интересы Лемэтра изменились по сравнению с 1927 годом, и как сам по себе вопрос о расширении вселенной, занимавший его в 1931 году, стал для него менее значительным: теперь его интересовали глубокие причины этого расширения, начало этого процесса, и то, каким образом могли сформироваться первые галактик.

Раздел 1, первый абзац

Сноска “Мы рассматриваем просто связанное эллиптическое пространство, т.е. без точек-антиподов” исключено из перевода 1931 года.

Вскоре после 1917 года де Ситтер [17][55] провел различие между сферическим пространством S^3 и проективным пространством P^3 , как он назвал эллиптическое пространство. Как напомнил Лемэтр в первом абзаце, P^3 имеет в качестве (сопутствующего) объема $\pi^2 R^3$, а не $2\pi^2 R_0^3$, как это имеет место для S^3 , а наибольшая длина замкнутой прямой линии равна πR вместо $2\pi R$. Главное космологическое различие состоит в наличии в S^3 точки-антипода для любой точки и, в частности, для наблюдателя на расстоянии точно равным πR . Это было сочтено нежелательным, а модель P^3 – более подходящей.

Эддингтон [15] также использовал эллиптическое пространство в качестве более привлекательной альтернативы к S^3 , и Лемэтр принял эту же точку зрения¹¹. Мы можем думать, что он исключил эту свою сноску на всякий случай, поскольку топология не оказывает влияния на динамику, которой была посвящена его работа, и поскольку в это время он опубликовал расширенное обсуждение этой темы [54], на которое он указал в ссылке 4 в версии 1931 года.

Раздел 1, второй абзац

В переводе 1931 года оригинальная фраза “[...] представляет большой интерес в качестве объяснения того факта, что внегалактические туманности кажутся удаляющимися от нас с огромной скоростью [...]” заменено на фразу “[...] представляет чрезвычайный интерес как весьма естественное объяснение наблюдаемых скоростей разбегания внегалактических туманностей [...]”, что учитывает проделанную Хабблом и Хьюмасоном после 1927 года наблюдательную работу; наличие скоростей разбегания получило твердо установленный статус.

Раздел 1, третий абзац

Фраза “Это соотношение предсказало существование масс, в гигантское число раз превышающих любую известную величину, когда теория была впервые подвергнута сравнению с фактами” заменена фразой “Это соотношение предсказало существование масс, в огромное число раз превышающих любую известную в то время величину”.

¹¹ Заметим, что эллиптическое пространство является связанным не просто, а множественно, см., например, [16].

Раздел 1, третий абзац

Сноска со ссылкой на статью Хаббла 1926 года удалена, так как утратила актуальность.

Раздел 1, шестой абзац

Изъяты две сноски. Обе сообщают геометрические подробности и тонкости относительно решения де Ситтера, которые Лемэтр, вероятно, счел неподходящими для такого журнала, как M.N.R.A.S, ориентированного скорее на астрономию, чем на геометрию. Эти подробности заимствованы, главным образом, из статьи Ланцоша (K. Lanczos) и статей 1925 года самого Лемэтра. В версии 1931 года он добавил в конце статьи библиографические ссылки на Ланцоша и себя, не развивая эту тему, а также добавил ссылки на Вейля (H. Weyl) и Дюваля (P. du Val).

Раздел 2

Между уравнениями (4) и (5) из соображений экономии места изъята фраза “Это может быть предметом интересной интерпретации”.

Раздел 4

Абзацы от “Радиальные скорости 43 внегалактических туманностей [. . .]” до “Эти соотношения позволяют нам вычислить R_0 ”, так же, как и три сноски, изъяты и заменены фразой “На основании анализа доступных данных мы принимаем $R'/R = 0,68 \times 10^{-27} \text{ см}^{-1}$ ”. Это в точности часть статьи 1927 года, где Лемэтр обсуждает астрономические данные по красным смещениям, ошибки в оценке расстояний, где он дает соотношение пропорциональности между скоростью и расстоянием, и в сносках ссылки на Штромберга и Лундмарка, равно как и свой расчет двух возможных значений константы пропорциональности – 575 and 670, в зависимости того, как группировать данные. Оригинальное уравнение (24) усечено до чисто числового соотношения, тогда как оригинальное уравнение в точности содержит то, что называют законом Хаббла.

В письме от 9 марта 1931 года, адресованном Смарту (William H. Smart), редактору M.N.R.A.S., Лемэтр пишет: “Я посылаю Вам перевод статьи. Я не счел целесообразным перепечатывать предшествующее обсуждение радиальных скоростей, которое, очевидно, уже не является актуальным, а также обсуждение геометрических моментов, которое можно заменить небольшим библиографическим списком по этой теме” (цитируется в [53]). Решение Лемэтра вполне понятно, поскольку данные, использованные им в 1927, лишь очень неточно дали линейное соотношение $v = Hd$, тогда как в 1931 новые данные Хаббла позволили установить это соотношение с гораздо большей точностью, см. рис. 3, чтобы сравнить графики.

Кроме того, как он сам объяснил в 1950 году, в 1927 году в его распоряжении не было данных о скоплениях галактик, и добавил, что “закон Хаббла не мог бы быть доказан без знания данных, относящихся к этим скоплениям” [56]. Здесь мы снова видим одну, упомянутую выше, характерную особенность личности Лемэтра, а именно решающее значение, которое он всегда придавал экспериментальным данным.

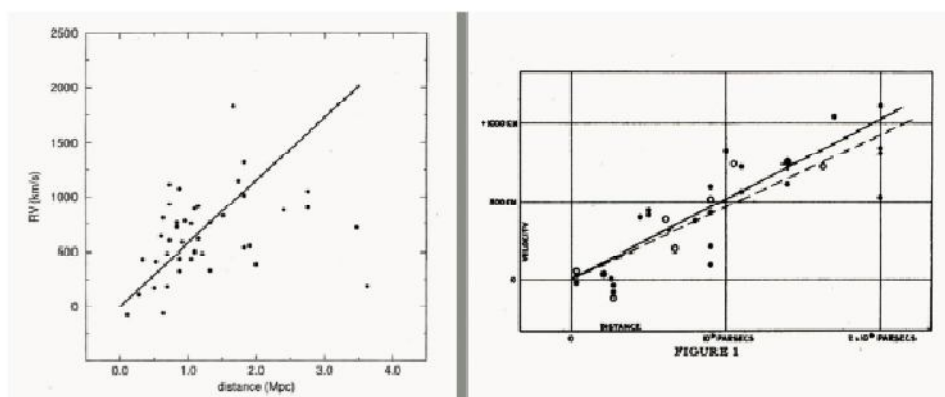


Рисунок 3: Сравнение между данными, использованными Лемэтром в 1927 году (слева) для получения первого эмпирического значения темпа расширения Вселенной, равного 575 км/с/Мпк (реконструировано в [30]), и диаграммой радиальная скорость – радиальная скорость, опубликованной Хабблом в 1929 году, где наиболее правдоподобный наклон составляет 530 км/с/Мпк (справа).

Раздел 6

Пункт 4 выводов из статьи 1927 года, дающий для радиуса вселенной $1/5$ от радиуса гиперсферы Эйнштейна, исключен, а в следующей фразе Лемэтр изменяет диапазон 100-дюймового телескопа в Маунт Вильсон, который Хаббл оценил от $R=120$ до $R=200$.

Добавленные ссылки

В то время, как перевод 1931 года не содержит сносок, в конце его приведены новые ссылки, которые не могли быть даны в статье 1927 года: на статью Фридмана 1922 года и на комментарий Эйнштейна к ней, на статью Толмена о моделях переменного радиуса 1923 года, на развитие его собственной модели, данному Эддингтоном, де Ситтером и им самим в 1930 году, и, в конце концов, на две популярные публикации: Лемэтра (1929 г., на французском языке) и де Ситтера (1931 г.).

Ссылки

- [1] J.-P. Luminet, *Editorial note to The beginning of the world from the point of view of quantum theory*, *Gen. Relativ. Gravit.* **43**, n°10, 2911-2928 (2011).
- [2] H. Weyl, *Zur allgemeinen relativitätstheorie*, *Physikalische Zeitschrift*, **24**, 230–232 (1923). English translation: H. Weyl, *On the general relativity theory*, *Gen. Relativ. Gravit.*, **35**, 1661–1666 (2009).
- [3] C. Wirtz, *De Sitters Kosmologie und die Radialbewegungen der Spiralnebel*, *Astronomische Nachrichten*, **222**, 21 (1924).
- [4] L. Silberstein, *The Curvature of de Sitter's Space-Time Derived from Globular Clusters*, *M.N.R.A.S.*, **4** 363 (1924).
- [5] K. Lundmark, *The Motions and the Distances of Spiral Nebulae*, *M.N.R.A.S.*, **85**, 865 (1925).

- [6] H. S. Kragh, D. Lambert, *The Context of Discovery: Lemaître and the Origin of the Primeval-Atom Universe*, *Annals of Science*, **64**, 445–470 (2007).
- [7] W. H. de Sitter, *On Einstein's Theory of Gravitation and Its Astronomical Consequences*, *M.N.R.A.S.*, **78**, 3–28 (1917).
- [8] G. Lemaître, *Note on De Sitter's Universe*, *The Physical Review*, **25**, 903 (1925).
- [9] H. Bondi, T. Gold, *The Steady State Theory of the Expanding Universe*, *M.N.R.A.S.*, **108**, 252–270 (1948); F. Hoyle, *A New Model for the Expanding Universe*, *M.N.R.A.S.*, **108**, 372–382 (1948).
- [10] A. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Harwood, 1990.
- [11] G. Lemaître, *Note on De Sitter's Universe*, *Journal of Mathematics and Physics* **4** 189-192 (1925).
- [12] G. Lemaître, *The gravitational field in a fluid sphere of uniform invariant density according to the theory of relativity; Note on de Sitter Universe; Note on the theory of pulsating stars.*, Ph.D. thesis, Department of Physics, M.I.T. (1927).
- [13] K. Freeman, *Slipher and the Nature of the Nebulae*, in *Origins of the Expanding Universe: 1912-1932*, M. J. Way and D. Hunter, eds., ASP Conf. Ser., Vol. 471 (2013), arXiv:1301.7509
- [14] J. A. Peacock, *Slipher, galaxies, and cosmological velocity fields*, in *Origins of the Expanding Universe: 1912-1932*, M. J. Way and D. Hunter, eds., ASP Conf. Ser., Vol. 471 (2013), arXiv:1301.7286
- [15] A. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge University Press (1923), p.162 (reprinted 1960).
- [16] M. Lachièze-Rey, J.-P. Luminet, *Cosmic Topology*, *Physics Reports*, **254**, 135–214 (1985).
- [17] A. Friedmann, *Über die Krümmung des Raumes*, *Zeitschrift für Physik*, **10**, 377 (1922). English translation: *On the curvature of space*, *Gen. Relativ. Gravit.*, **31**, n°12, 1991 (1999)
- [18] A. Einstein, *Notiz zu der Arbeit von A. Friedmann Über die Krümmung des Raumes*, *Zeitschrift für Physik*, **16**, 228 (1923).
- [19] O. Godart, *Monseigneur Lemaître, sa vie, son oeuvre*, with notes by André Deprit, *Revue des Questions Scientifiques*, **155**, 155–182 (1984).
- [20] M. Lachièze-Rey, J.-P. Luminet, *Figures du Ciel*, Paris, Seuil/BnF, 1998, p. 155. English translation: *Celestial Treasury*, Cambridge University Press, 2001.
- [21] G. Lemaître, *La grandeur de l'espace*, *Revue des Questions Scientifiques*, **15**, 9–36 (1929).
- [22] G. Strömberg, *Analysis of Radial Velocities of Globular Clusters and Non-Galactic Nebulae*, *Astrophysical Journal*, **61**, 353 (1925).
- [23] E. Hubble, *A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae*, *Contributions from the Mount Wilson Observatory / Carnegie Institution of Washington*, **310** 1, (1927).
- [24] J. Hopmann, *Photometrische Untersuchungen von Nebelflecken*, *Astronomische Nachrichten*, **214** 425, (1921).
- [25] G. Shaviv *Did Edwin Hubble plagiarize?*, arXiv:1107.0442, (2011).
- [26] D. Lambert, *A propos de la controverse "Hubble- Lemaître"*, *Pour la Science*, **412**, 78–81 (février 2012).
- [27] G. Lemaître, *Rencontres avec Einstein*, *Revue des Questions Scientifiques* t. 79 5e série, vol. **19**, p. 129–132 (1958).
- [28] J.-P. Luminet, *L'invention du big bang*, Le Seuil, Paris, 2004; A. Belenkiy, *Alexander Friedman and the Origins of Modern Cosmology*, in *Origins of the Expanding Universe: 1912-1932*, M. J. Way and D. Hunter, eds., ASP Conf. Ser., Vol. 471 (2013), arXiv:1302.1498.
- [29] H. P. Robertson, *On Relativistic Cosmology*, *Philosophical Magazine Series 7*, **5**, 835 (1928).
- [30] H. W. Duerbeck, W.C. Seitter, *In Hubbles Shadow: Early Research on the Expansion of the Universe*, Eds. C. Sterken and J.E. Heamshaw, chap 15, 231 (2000). URL <http://books.google.se/books>
- [31] H. P. Robertson, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **15**, 822 (1929).
- [32] E. Hubble, *A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae*, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **15**, March 15, Number 3, 168 (1929).

- [33] E. Hubble, *The Realm of the Nebulae*, Yale University Press, 1936; Dover Publications, 1958.
- [34] G. E. Christianson, *Edwin Hubble: Mariner of the Nebulae*, University of Chicago Press, 1996, p. 201.
- [35] S. van den Bergh, *Discovery of the Expansion of the Universe*, *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*, **105**(5), 197 (2011) [arXiv:1108.0709v2].
- [36] D. Block, *A Hubble Eclipse: Lemaître and Censorship*, arXiv :1106.3928 (2011).
- [37] R. C. Tolman, *On the possible line elements for the universe* *Proceedings of the National Academy of Sciences* **15**, 297 (1929).
- [38] R. C. Tolman, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **16**, 320 (1930).
- [39] A.S. Eddington, *Remarks at the Meeting of the Royal Astronomical Society, The Observatory*, vol. **53**, 39–40 (1930).
- [40] H. Kragh, *Cosmology and Controversy*, Princeton University Press, 1996, chap.2.
- [41] P.J.E. Peebles, *Principes of Physical Cosmology*, Princeton University Press, 1993, p. 80.
- [42] J.-P. Luminet, *Alexandre Friedmann, Georges Lemaître: Essais de Cosmologie*, Paris, Le Seuil, coll. "Sources du Savoir", 1997.
- [43] W. De Sitter, *On the Distances and Radial Velocities of Extra-galactic Nebulae, and the Explanation of the Latter by the Relativity Theory of Inertia*, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **16**(7), 474–488 (1930).
- [44] A.S. Eddington, *The Observatory*, vol. **53**, 162–164 (1930).
- [45] A.S. Eddington, *On the Instability of Einstein's Spherical World*, *M.N.R.A.S.* **90**, 668–678 (1930).
- [46] G. Lemaître, *A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra-galactic nebulae*, *M.N.R.A.S.*, **41**, 483–490 (1931).
- [47] J.-P. Luminet, *Editorial note to "The beginning of the world from the point of view of quantum theory"*, *Gen. Relativ. Gravit.*, **43**, 2911–2928 (2011) [arXiv:1105.6271v1].
- [48] S.L. Jaki, *Science and Creation*, Scottish Academic Press, Edinburgh and London, (1974); R. W. Smith, *The expanding Universe, Astronomy's "Great Debate" 1900-1931*, Cambridge, Cambridge University Press, 1982; O. Godart, M. Heller, *Cosmology of Lemaître*, Pachart Pub. House, Tucson, 1985; J.P. Luminet, *op. cit.*, 1997; D. Lambert, *Un atome d'univers. La vie et l'œuvre de Georges Lemaître*, Bruxelles, Lessius, 2000; H. Kragh, R.W. Smith, *Who discovered the expanding Universe ?*, *History of Science* **41**, 141 (2003); J. Farrell, *The Day Without Yesterday: Lemaître, Einstein, and the Birth of Modern Cosmology*, New York, Thunders Mouth Press, 2005; H. Nussbaumer, L. Bieri, *Discovering the Expanding Universe*, Cambridge University Press, 2009.
- [49] P. Couderc, *L'expansion de l'Univers*, Paris, P.U.F., 1950.
- [50] D. Lambert, *Georges Lemaître: Repères biographiques*, *Rev. Quest. Sci.* **183**(4), 337–398 (2012).
- [51] A. Krasinski, G.F.R. Ellis, *Editor's note*, *Gen. Relativ. Gravit.*, **31**, n°12, 1985 (1999)
- [52] S. van den Bergh, *The Curious Case of Lemaître's Equation No.24*, *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada* **105**, 151 (2011) [arXiv:1106.1195]; E. S. Reich, *Edwin Hubble in translation trouble*, *Nature* <http://dx.doi.org/10.1038/news.2011.385> (2011).
- [53] M. Livio, *Mystery of the missing text solved*, *Nature*, 10 November 2011, **479**, 171–173 (2011).
- [54] G. Lemaître, *The expanding universe*, *M.N.R.A.S.*, **41**, 491–501 (1931).
- [55] W. de Sitter, *On the curvature of space*, *Proceedings of the Royal Academy of Amsterdam*, **20**, 229 (1917).
- [56] G. Lemaître, *Compte-rendu du livre "L'univers en expansion" de Paul Couderc*, *Annales d'Astrophysique*, **XIII**(3), 344–345 (1950).