

## Прямое измерение квантовой волновой функции

Джефф С. Лундин и др. (Канада)

Реферат подготовил М.Х. Шульман ([shulman@dol.ru](mailto:shulman@dol.ru), [www.timeorigin21.narod.ru](http://www.timeorigin21.narod.ru))

---

arXiv:1112.3575v1 [quant-ph] 15 Dec 2011

Direct Measurement of the Quantum Wavefunction

Jeff S. Lundeen<sup>1</sup> ([jeff.lundeen@nrc-cnrc.gc.ca](mailto:jeff.lundeen@nrc-cnrc.gc.ca)), Brandon Sutherland, Aabid Patel, Corey Stewart, and Charles Bamber

<sup>1</sup>*Institute for National Measurement Standards, National Research Council, 1200 Montreal Road, Ottawa, Canada, K1A 0R6*

(Dated: December 16, 2011)

---

Волновая функция – центральное понятие квантовой теории – представляет собой сложное распределение вероятностей, используемое для полного описания квантовой системы. Несмотря на ее фундаментальную роль, она обычно вводится как абстрактный элемент теории без явного определения [1, 2]. Скорее, физики приходят к рабочему пониманию волновой функции через ее использование при вычислении результатов измерения вероятностей с помощью Правила Борна [3]. В настоящее время ученые определяют волновую функцию с помощью методов томографии [4–8], когда волновая функция оценивается в виде, наиболее совместимом с набором измеренных данных. Косвенный характер этих методов создает проблемы с определением волновой функции. Здесь мы показываем, что волновая функция может быть измерена непосредственно с помощью последовательного измерения двух сопряженных переменных системы. Основа нашего метода заключается в том, что первое измерение является слабым измерением [9–18]), не возмущающим второго. В результате действительная и мнимая компонента волновой функции измерялись непосредственно нашим измерительным прибором. Мы приводим экспериментальный пример непосредственного измерения поперечной пространственной волновой функции одиночного фотона – задача, которая ранее не была решена ни одним методом. Мы показываем, что эта концепция является универсальной, будучи применимой как к другим степеням свободы фотона (например, поляризации, частоте и т.п.), так и к другим квантовым системам (например, к квантовому состоянию электрона с z-спином, СКВИДам - сверхпроводящим квантовым интерференционным датчикам, ионным ловушкам и т.п.). Следовательно, этот метод дает для волновой функции способ ее прямого и общего определения в терминах специфического набора экспериментальных операций [19]. Мы надеемся расширить диапазон квантовых систем, где ученые смогут описать и найти новые пути для понимания фундаментальных основ квантовой теории.

Волновая функция  $\Psi$ , также известная как ‘квантовое состояние’, является значительно более трудным для измерения объектом, чем состояние классической частицы, которое определяется просто результатом измерения ее координаты  $X$  и импульса  $P$ . Согласно принципу неопределенности Гейзенберга, в квантовой теории точное измерение  $X$  возмущает волновую функцию частицы и вынуждает результат последующего измерения  $P$  становиться случайным. Таким

образом, мы ничего не узнаем об импульсе частицы. Действительно, невозможно полностью определить неизвестную волновую функцию одиночной системы [20].

Рассмотрим теперь вместо этого выполнение измерения  $X$  над ансамблем частиц, каждая из которых обладает той же  $\Psi$ . Вероятность получить результат  $X = x$  равна  $|\Psi(x)|^2$ . Аналогичным образом, вероятность результата  $P = p$  должна быть равна  $|\Phi(p)|^2$ , где  $\Phi(p)$  - это Фурье-преобразование от  $\Psi(x)$ . Даже этих двух распределений вероятностей недостаточно для однозначного определения  $\Psi(x)$  (см. 1d проблемы определения фазы [21]). Вместо этого можно реконструировать  $\Psi$ , выполнив большое число различных измерений (например,  $Q(\theta) = X \cos(\theta) + P \sin(\theta)$ ), а затем оценив  $\Psi$  в качестве наиболее подходящей функции, совместимой с результатами измерений. Этот метод известен под именем томографии квантового состояния [4–8]. Мы, напротив, вводим метод для прямого измерения  $\Psi$  над ансамблем. Здесь под ‘прямым’ мы подразумеваем факт независимости метода от сложных измерительных наборов и вычислений; Среднее значение сигнала, порождаемого волновой функцией, является просто пропорциональным ее действительной и мнимой компонентам в этой точке. Метод остается справедливым при последовательном измерении двух сопряженных (complementary) переменных системы.

В основе прямого метода измерения лежит редукция возмущения, вызванного первым измерением. Рассмотрим измерение произвольной переменной  $A$ . В общем случае измерение может рассматриваться как установление связи между прибором и физической системой, результатом чего оказывается сдвиг вектора. Положение вектора указывает результат измерения. При использовании методологии, известной под именем ‘слабого измерения (weak measurement)’, ослабляется уровень связи и, соответственно, величина возмущения, обусловленного измерением [9–18]. Эта стратегия также понижает точность измерения, которая, однако, может быть восстановлена благодаря усреднению. Под средним значением слабого измерения понимается просто величина математического ожидания  $\langle \Psi | A | \Psi \rangle$ , определенная средним сдвигом положения вектора, пропорционального этой величине.

Отличительным признаком слабого взаимодействия является то, что оно не возмущает последующее обычное (или ‘сильное’) измерение другой наблюдаемой  $C$  в пределе, когда связь исчезает. Для частного подмножества измерений, при которых  $C = c$ , можно вывести среднее значение слабого измерения  $A$ . В пределе нулевой силы взаимодействия эта величина называется слабым значением (Weak Value) и дается [9] выражением

$$\langle A \rangle_W = \frac{\langle c | A | \Psi \rangle}{\langle c | \Psi \rangle}. \quad (1)$$

Выбор такого частного подмножества для ансамбля, основанный на результатах последовательного измерения известен как ‘пост-селекция (post-selection)’, и является общепризнанным инструментом в квантовой информатике [22, 23].

В отличие от стандартной величины математического ожидания  $\langle A \rangle$ , слабое значение  $\langle A \rangle_W$  может оказаться комплексным числом. Этот на первый взгляд странный результат, как можно показать, имеет простой физический смысл: положения вектора смещаются величиной  $\text{Re} \langle A \rangle_W$  и воспринимаются скачком импульса  $\text{Im} \langle A \rangle_W$  [24–26]. Комплексная природа слабого значения предполагает,

что оно может быть использовано для определения как действительной, так и мнимой частей волновой функции.

Возвращаясь к нашему примеру с одиночной частицей, рассмотрим слабое измерение координаты ( $A = \pi_x \equiv |x\rangle\langle x|$ ), за которым следует сильное измерение импульса, дающее  $P = p$ . В этом случае слабое значение равно

$$\langle \pi_x \rangle_W = \frac{\langle p|x\rangle \langle x|\Psi\rangle}{\langle p|\Psi\rangle} \quad (2)$$

$$= \frac{e^{ipx/\hbar} \Psi(x)}{\Phi(p)}. \quad (3)$$

В случае  $p = 0$  это упрощается до

$$\langle \pi_x \rangle_W = k \cdot \Psi(x), \quad (4)$$

где  $k = 1/\Phi(0)$  является константой (которую можно впоследствии исключить с помощью нормировки волновой функции). Усредненный результат слабого измерения  $\pi_x$  пропорционален волновой функции частицы в точке  $x$ . Сканирование слабого измерения по  $x$  дает полную волновую функцию. При каждом значении  $x$  сдвиги наблюдаемых значений координаты и импульса при измерении вектора пропорциональны  $\text{Re}\Psi(x)$  и  $\text{Im}\Psi(x)$  соответственно. Вкратце, ослабляя возмущение, вызванное измерением  $X$ , и затем выполняя обычное измерение  $P$ , мы измеряем волновую функцию одиночной частицы.

В качестве экспериментального примера мы выполнили прямое измерение поперечной пространственной волновой функции фотона. Рассматривая движение фотона вдоль оси  $Z$ , мы напрямую измеряем  $X$ -волновую функцию фотона, иногда именуемую 'пространственной модой'. Функция Вигнера пространственной моды классического луча была измерена напрямую, но для единичного фотонного состояния [27, 28].

Мы формируем поток фотонов одним из двух способов: либо за счет ослабления лазерного луча, либо путем генерации одиночных фотонов в ходе спонтанного преобразования с понижением (SPDC). Фотоны имеют основную длину волны  $\lambda = 783$  нм или  $\lambda = 800$  нм соответственно. Эксперимент (схема и детали представлены на рис. 1) может быть разделен на четыре последовательных шага: приготовление поперечной волновой функции, слабое измерение поперечной координаты фотона, пост-селекция фотонов с нулевыми поперечными импульсами и извлечение результатов слабого измерения.

Ансамбль фотонов с волновой функцией  $\Psi(x)$  эмитируется из одномодового (single mode – SM) волокна и коллимируется. Мы начинаем с прямого измерения волновой функции (подробно представленного на рис. 1). Затем мы проверяем наш метод, вводя известные изменения амплитуды и фазы для фотонов, чтобы приготовить серии модифицированных волновых функций.

Мы слабо измеряем поперечную координату фотона, связывая его с внутренней степенью свободы – его поляризацией. Это позволяет нам использовать угол вектора линейной поляризации фотона. При координате  $x$ , для которой мы хотим измерить  $\pi_x = |x\rangle\langle x|$ , мы поворачиваем линейную поляризацию света на  $\varphi$ . Рассмотрим случай, когда этот угол принят равным  $90^\circ$ . В данном случае можно идеально установить, имеет ли фотон координату  $x$ , потому что можно идеально различить ортогональные поляризации  $0^\circ$  и  $90^\circ$ . Это сильное

измерение. Уменьшение силы измерения соответствует снижению  $\varphi$ , что делает невозможным с определенностью выявить, имел ли данный конкретный фотон координату  $X = x$ . Выгода такого уменьшения точности заключается в соразмерном уменьшении возмущения волновой функции одиночного фотона.

Затем мы используем линзу, выполняющую преобразование Фурье, и щель для пост-селекции только тех фотонов, для которых  $p = 0$ . Тем самым осуществляется сильное измерение  $P$ . В полученном подмножестве фотонов мы находим среднее значение (результат слабого измерения)  $\pi_x$ . Средний поворот вектора линейной поляризации пропорционален действительной части слабого значения. Его сопряженная векторная переменная, поворот кругового поляризационного базиса, пропорциональна мнимой части слабого значения [25]. Формально, если мы интерпретируем начальную поляризацию как вектор “вниз” состояния со спином  $1/2$ , то слабое значение дается выражением

$$\langle \pi_x \rangle_W = \frac{1}{\sin \varphi} (\langle s | \sigma_x | s \rangle - i \langle s | \sigma_y | s \rangle), \quad (5)$$

где  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  – x- и y-матрицы Паули соответственно, а  $|s\rangle$  – финальное поляризационное состояние вектора [25]. Мы измеряем математические ожидания  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , посылая фотоны через полуволновую пластинку или четвертьволновую пластинку соответственно, а затем – через поляризационный светоделитель (PBS). Таким образом мы получаем значение  $\text{Re}\Psi(x)$  (полуволновая пластинка) и  $\text{Im}\Psi(x)$  (четвертьволновая пластинка) из сигнала небаланса между детекторами 1 и 2 на выходах PBS.

При  $\varphi = 20^\circ$  мы сканируем наше измерение  $\pi_x$  с шагом 1 мм и находим слабое значение  $\langle \pi_x \rangle_W$  на каждом шаге. Таким способом мы непосредственно измеряем поперечную волновую функцию фотона  $\Psi(x) = |\Psi(x)| \exp(i\phi(x))$ . Мы нормируем  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  с помощью одного и того же множителя, так что  $\int |\Psi(x)|^2 dx = 1$ ; благодаря этому исключается коэффициент пропорциональности  $\sin \varphi / \Phi(0)$ . Чтобы подтвердить наш метод прямого измерения, мы тестируем его на сериях различных волновых функций. Используя наш источник единичных фотонов с понижением частоты (SPDC), мы начинаем с измерения начальной усеченной гауссовой волновой функции (рис. 2), описанной на рис. 1. Подключаясь к лазерному источнику фотонов, мы затем регулируем амплитуду, а после этого и фазу начальной волновой функции с помощью аподизированного фильтра и плоского стекла соответственно для создания двух новых тестов (рис. 3). Мы еще сильнее модифицируем фазу волновой функции, вводя ряд фазовых градиентов, а затем кривизну фазу (рис. 4). Для всех тестов мы получили хорошее согласие между ожидаемыми и измеренными значениями волновой функции как по фазе, так и по амплитуде (см. подписи к рисунку).

Теперь опишем, как техника слабого измерения может быть использована для прямого измерения квантового состояния произвольной квантовой системы. Мы свободны измерять квантовое состояние в любом выбранном базисе  $\{|a\rangle\}$  (ассоциированном с наблюдаемой  $A$ ) системы. Метод предусматривает слабое проектирование в этом базисе, например,  $\pi_a \equiv |a\rangle \langle a|$ , и пост-селекцию по частному значению  $b_0$  дополнительной наблюдаемой  $B$  (см. в оригинальной статье дополнительное обсуждение точного определения дополнительности). В этом случае слабое значение равно

$$\langle \pi_a \rangle_W = \frac{\langle b_0 | a \rangle \langle a | \Psi \rangle}{\langle b_0 | \Psi \rangle} = v \cdot \langle a | \Psi \rangle, \quad (6)$$

где  $v$  - является константой, не зависящей от  $a$ . Таким образом, слабое значение пропорционально амплитуде состояния  $|a\rangle$  в квантовом состоянии. Последовательное движение через все состояния в базисе  $A$  непосредственно дает квантовое состояние, представление в этом базисе

$$|\Psi\rangle = v \cdot \sum_a \langle \pi_a \rangle_W |a\rangle, \quad (7)$$

Это – общий теоретический результат данной статьи. Он показывает, что в любой физической системе можно непосредственно измерить квантовое состояние этой системы, сканируя с помощью слабого измерения по некоторому базису и используя пост-селекцию в дополнительном базисе.

Слабое измерение необходимо связано с повышением эффективности для обеспечения точности. Сравнение нашего метода с текущей техникой томографической реконструкции потребует тщательного анализа отношения сигнал/шум в данной системе. Чтобы увеличить это отношение при прямом измерении пространственной волновой функции фотона, будущие эксперименты должны исследовать одновременную пост-селекцию множества поперечных импульсов.

В нашем методе прямого измерения волновая функция являет себя как сдвиг указателя (“стрелки”) измерительного прибора. В этом смысле метод подразумевает простое и однозначное операциональное определение [19] квантового состояния: это средний результат слабого измерения переменной, за которым следует сильное измерение дополнительной переменной.

Мы предвидим, что простота метода сделает осуществимым полное описание квантовых систем (например, атомных орбиталей, молекулярных волновых функций [29], сверхбыстрых волновых пакетов [30]), ранее не поддававшихся этому. Метод может также рассматриваться как транскрипция квантовой состояния в состояние указателя, что потенциально полезно в качестве протокола для квантовой информатики.

Примечание переводчика: оригинал статьи содержит дополнения, посвященные некоторым техническим вопросам, а также обсуждению поперечной волновой функции фотона и дополненности.

По вопросам перепечатки обращаться по ссылке [www.nature.com/reprints](http://www.nature.com/reprints).

Корреспонденцию и замечания следует адресовать:

Jeff S. Lundeen [jeff.lundeen@nrc-cnrc.gc.ca](mailto:jeff.lundeen@nrc-cnrc.gc.ca).

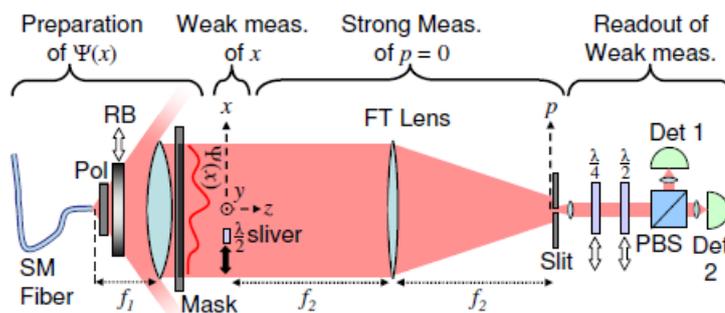


Рисунок 1. Прямое измерение поперечной волновой функции фотона.

Preparation of  $\Psi(x)$  – приготовление  $\Psi(x)$

Weak meas. of  $x$  – слабое измерение  $x$

Strong Meas. of  $p=0$  – сильное измерение при  $p=0$

Readout of Weak meas. – результат слабого измерения

Чтобы фотоны вначале имели идентичные волновые функции, мы передаем их через оптоволокно, которое позволяет проходить только одной моде (SM). Эта мода оптоволоконного кабеля (SM fiber Nufern PM780-HP) представляет собой приблизительно гауссиану с номинальным  $1/e^2$  диаметром of  $5.3 \pm 1.0$  мкм. Фотоны поступают из оптоволоконна и проходят через микропроводной поляризатор (Pol) (Edmund Optic NT47-602), собираясь благодаря ахроматической линзе ( $f_1 = 30$  см, диаметр = 5 см, Thorlabs AC508-300-B), причем после оптоволоконна они проходят одно фокусное расстояние  $f_1$ . Линза маскируется благодаря прямоугольной апертуре размером  $\text{dimension } x \times y = 43 \text{ мм} \times 11 \text{ мм}$ . Таким образом, наша номинальная начальная волновая функция представляла собой усеченную гауссиану с  $1/e^2$  диаметром 56.4 мм и плоским фазовым профилем. Мы модифицируем амплитуду и фазу номинальной  $\Psi(x)$  с целью создать серии тестовых волновых функций. Последующая 45 мм линза – прямоугольная полуволновая ( $\frac{\lambda}{2}$ ) пластинка ( $x \times y \times z$  размеры составляют 1 мм  $\times$  25 мм  $\times$  1 мм) при координате  $x$  используется для слабого измерения  $\pi_x = |x\rangle \langle x|$ . Затем фотоны подвергаются оптическому Фурье-преобразованию (FT) с помощью ахроматической линзы ( $f_2 = 1\text{ м}$ , диаметр = 5 см, Thorlabs AC508-1000-B), размещенной на фокусном расстоянии  $f_2$  от серебряной волновой пластинки. В плоскости Фурье-преобразования, на одном фокусном расстоянии  $f_2$  позади линзы, мы производим постселекцию фотонов с  $p = 0$ , пропуская только те из них, которые проходят через осевую прямоугольную щель шириной 15 мкм. Мы коллимируем прошедшие через щель (Slit) фотоны благодаря линзе с с фокусным расстоянием  $f_3 = 3$  см. Эти фотоны проходят через полуволновую пластинку ( $\frac{\lambda}{2}$ ) или четвертьволновую пластинку ( $\frac{\lambda}{4}$ ), а затем – через поляризационный светоделитель (PBS). Перед каждым выходным портом фотоны фокусируются на детектор (Det 1 и Det 2): для одиночных фотонов это счетчик (Silicon Avalanche Photodiodes, PerkinElmer SPCM-AQHR-14), в случае лазера - кремниевый фотодиод (Thorlabs, DET10A). Небаланс отсчетов или сигнала между двумя детекторами пропорционален действительной ( $\frac{\lambda}{2}$ ) или мнимой ( $\frac{\lambda}{4}$ ) части волновой функции.

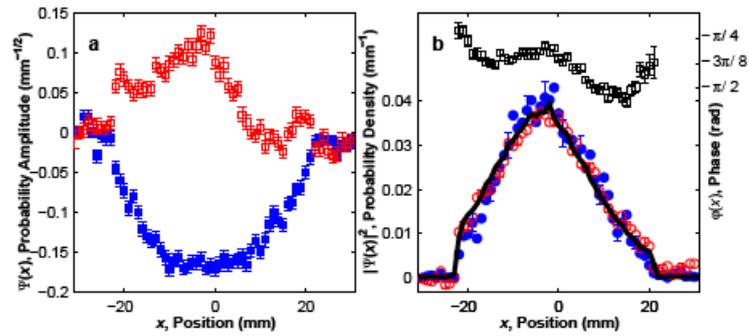


Рисунок 2. Измеренная волновая функция одиночного фотона  $\Psi(x)$ .

а -  $\text{Re}\Psi(x)$  (сплошные голубые квадратики) и  $\text{Im}\Psi(x)$  (незакрашенные красные квадратики), измеренные для усеченной гауссовой волновой функции.  
 б - Используя данные а, мы строим график фазы  $\phi(x) = \arctan(\text{Re}\Psi(x)/\text{Im}\Psi(x))$  (незакрашенные квадраты) и квадрат модуля  $|\Psi(x)|^2$  (незакрашенные красные кружки). Имеется хорошее согласие между последним и сильным измерением вероятности по  $x$  распределения  $\text{Prob}(x)$  (сплошная линия), построенными с помощью сканирования детектора вдоль  $x$  в плоскости серебряной пластинки. График фазы является относительно плоским, как ожидается для моды, поступающей из оптоволокна. Небольшое расхождение совместимо со спецификациями изготовителя первой линзы и кривизны фазы, измеренной с помощью отсекающей пластинки. Мы также исключали полностью щель. В таком случае пост-селекция отсутствует, и слабое значение  $\langle \pi_x \rangle$  становится равным стандартной величине математического ожидания  $\langle \Psi | \pi_x | \Psi \rangle = |\Psi(x)|^2$ . Мы строим график  $\text{Re}\langle \pi_x \rangle$  (незакрашенные красные кружки), подвергнутой нормированию, так что  $\int \text{Re}\Psi(x) dx = 1$  и находим, что имеется хорошее согласие с  $\text{Prob}(x)$ . Мы также находим, что  $\text{Im}\langle \pi_x \rangle$  в десять раз меньше, что делает  $\langle \pi_x \rangle$  почти действительной величиной, как ожидалось. Показана погрешность каждой третьей точки (по статистике).

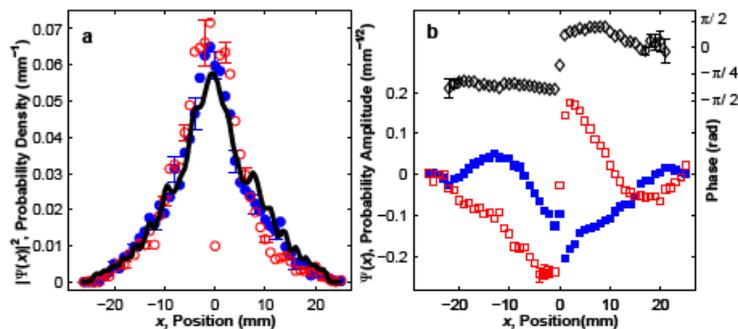


Рисунок 3. Измерения модифицированной волновой функции.

Мы далее тестируем наши возможности измерять  $\Psi(x)$  за счет изменения  $\text{Prob}(x)$ , помещая аподизированный аттенуатор - реверсную плоско-выпуклую линзу (RB на рис. 1) (Edmund Optics, NT64-388) за оптоволокном.

а. Мы вычисляем  $|\Psi(x)|^2$  из данных (закрашенные синим цветом кружки) вдоль отсканированной детектором сплошной линии  $\text{Prob}(x)$  и видим между ними хорошее согласие.

б. Сохраняя на месте реверсную плоско-выпуклую линзу, мы модифицируем профиль фазы  $\phi(x)$  волновой функции, создавая разрыв фазы при  $x = 0$  с помощью стеклянной полуволновой пластинки поперек  $\Psi(x)$ . Справа мы показываем  $\text{Re}\Psi(x)$  (закрашенные синие квадратики) и  $\text{Im}\Psi(x)$  (незакрашенные красные квадратики) с разрывом фазы по краям пластинки. Разрыв еще нагляднее на графиках разности фаз между волновыми функциями, измеренными при наличии и в отсутствие стеклянной пластинки, показанной

слева (незакрашенные черные ромбики). Несмотря на разрывы, если мы используем  $\text{Re}\Psi(x)$  и  $\text{Im}\Psi(x)$  для вычисления  $|\Psi(x)|^2$  (а, незакрашенные красные кружки), мы видим отсутствие заметного влияния стеклянной пластинки. Это ожидаемо, поскольку стекло обладает проницаемостью порядка единицы.

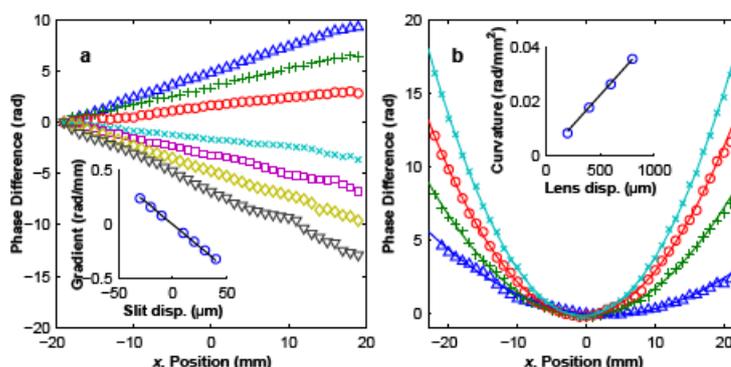


Рисунок 4. Модификация фазы волновой функции

**a.** Мы располагаем поперечно щель  $\Delta x_{slit} = -30, -20, -10, 10, 20, 30$  и  $40$  мкм ( $\Delta, +, \circ, \times, \diamond, \square, \nabla$  соответственно). Это эффективно переопределяет ось нулевого импульса системы. Наши фотоны теперь летят под углом к этой оси или, что то же самое, волновая функция имеет линейный градиент фазы  $\phi(x) = m \cdot x$ , где  $m = \Delta x_{slit} 2\pi / f_2 \lambda$ . Мы строим график разности фаз между исходной волновой функцией и волновой функцией с фазовым градиентом. Для ясности кривые были смещены на  $-20$  мм. Это соответствует сдвигу произвольной глобальной фазы  $\Psi(x)$ . На врезке градиент  $m$  представлен в виде функции  $\Delta x_{slit}$  (кружки, нанесенные на теоретическую кривую), очевидно хорошее соответствие.

**b.** Мы вводим квадратичную фазу, смещая, первую линзу на  $\Delta z = 200, 400, 600$  и  $800$  мкм ( $\Delta, +, \circ, \times$  соответственно) вдоль теоретических линий. Фаза  $\phi(x) = r \cdot x^2$ , кривизна фазы  $r = \pi \Delta z / f_1^2 \lambda$ . На врезке мы строим график кривизны  $r$  для экспериментальных результатов в функции смещения линзы  $\Delta x_{slit}$ , которые показывают хорошее соответствие с теорией (линия). Статистическая ошибка меньше, чем размер маркеров на всех графиках.

## Ссылки

- [1] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. & Laloe, F. Quantum Mechanics, vol. 1, 19 (Wiley-Interscience, 2006).
- [2] Mermin, N. D. What's bad about this habit. Phys. Today 62, 8–9 (2009).
- [3] Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. Quantum Mechanics: Nonrelativistic theory, vol. 3 of Course of Theoretical Physics, 6 (Pergamon Press, Oxford; New York, 1989), third edn.
- [4] Vogel, K. & Risken, H. Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase. Phys. Rev. A 40, 2847–2849 (1989).
- [5] Smithey, D. T., Beck, M., Raymer, M. G. & Faridani, A. Measurement of the wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography: Application to squeezed states and the vacuum. Phys. Rev. Lett. 70, 1244–1247 (1993).
- [6] Breitenbach, G., Schiller, S. & Mlynek, J. Measurement of the quantum states of squeezed light. Nature 387, 471–475 (1997).
- [7] White, A. G., James, D. F. V., Eberhard, P. H. & Kwiat, P. G. Nonmaximally entangled states: Production, characterization, and utilization. Phys. Rev. Lett. 83, 3103–3107 (1999).

- [8] Hofheinz, M. et al. Synthesizing arbitrary quantum states in a superconducting resonator. *Nature* 459, 546–549 (2009).
- [9] Aharonov, Y., Albert, D. Z. & Vaidman, L. How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100. *Phys. Rev. Lett.* 60, 1351–1354 (1988).
- [10] Ritchie, N. W. M., Story, J. G. & Hulet, R. G. Realization of a measurement of a “weak value”. *Phys. Rev. Lett.* 66, 1107–1110 (1991).
- [11] Resch, K. J., Lundeen, J. S. & Steinberg, A. M. Experimental realization of the quantum box problem. *Phys. Lett. A* 324, 125–131 (2004).
- [12] Smith, G. A., Chaudhury, S., Silberfarb, A., Deutsch, I. H. & Jessen, P. S. Continuous weak measurement and nonlinear dynamics in a cold spin ensemble. *Phys. Rev. Lett.* 93, 163602 (2004).
- [13] Pryde, G. J., O’Brien, J. L., White, A. G., Ralph, T. C. & Wiseman, H. M. Measurement of quantum weak values of photon polarization. *Phys. Rev. Lett.* 94, 220405 (2005).
- [14] Mir, R. et al. A double-slit ‘which-way’ experiment on the complementarity-uncertainty debate. *New J. Phys.* 9, 287 (2007).
- [15] Hosten, O. & Kwiat, P. Observation of the spin hall effect of light via weak measurements. *Science* 319, 787–790 (2008).
- [16] Dixon, P. B., Starling, D. J., Jordan, A. N. & Howell, J. C. Ultrasensitive beam deflection measurement via interferometric weak value amplification. *Phys. Rev. Lett.* 102, 173601 (2009).
- [17] Lundeen, J. S. & Steinberg, A. M. Experimental joint weak measurement on a photon pair as a probe of hardy’s paradox. *Phys. Rev. Lett.* 102, 020404 (2009).
- [18] Aharonov, Y., Popescu, S. & Tollaksen, J. A time-symmetric formulation of quantum mechanics. *Physics Today* 63, 27–32 (2010).
- [19] Bridgman, P. *The Logic of Modern Physics* (New York: Macmillan, 1927).
- [20] Wootters, W. K. & Zurek, W. H. A single quantum cannot be cloned. *Nature* 299, 802–803 (1982).
- [21] Trebino, R. *Frequency-Resolved Optical Gating: The Measurement of Ultrashort Laser Pulses* (Springer, New York, NY, 2002).
- [22] Knill, E., Laflamme, R. & Milburn, G. J. A scheme for efficient quantum computation with linear optics. *Nature* 409, 46–52 (2001).
- [23] Duan, L. M., Lukin, M. D., Cirac, J. I. & Zoller, P. Longdistance quantum communication with atomic ensembles and linear optics. *Nature* 414, 413–418 (2001).
- [24] Aharonov, Y. & Vaidman, L. Properties of a quantum system during the time interval between two measurements. *Phys. Rev. A* 41, 11–20 (1990).
- [25] Lundeen, J. S. & Resch, K. J. Practical measurement of joint weak values and their connection to the annihilation operator. *Phys. Lett. A* 334, 337–344 (2005).
- [26] Jozsa, R. Complex weak values in quantum measurement. *Phys. Rev. A* 76, 044103 (2007).
- [27] Mukamel, E., Banaszek, K., Walmsley, I. A. & Dorrer, C. Direct measurement of the spatial wigner function with areaintegrated detection. *Opt. Lett.* 28, 1317–1319 (2003).
- [28] Smith, B. J., Killeit, B., Raymer, M. G., Walmsley, I. A. & Banaszek, K. Measurement of the transverse spatial quantum state of light at the single-photon level. *Opt. Lett.* 30, 3365–3367 (2005).
- [29] Itatani, J. et al. Tomographic imaging of molecular orbitals. *Nature* 432, 867–871 (2004).
- [30] Dudovich, N. et al. Measuring and controlling the birth of attosecond xuv pulses. *Nature Phys.* 2, 781–786 (2006).