Анализ квантовой фазы для квантовых траекторий: шаг к рождению бомовского мышления

А. Санц и С. Мире-Артес (Испания)

Сокращенный перевод М.Х. Шульмана (shulman@dol.ru, www.timeorigin21.narod.ru)

---

arXiv:1104.1296v1 [quant-ph] 7 Apr 2011

Analyzing the quantum phase with quantum trajectories: A step towards the creation of a Bohmian thinking

A. S. Sanz and S. Miret-Artés

Instituto de Física Fundamental - CSIC, Serrano 123, 28006 Madrid, Spain

(Dated: April 8, 2011)

Стандартная квантовая механика связана с рядом постулатов, которые образуют ее фундаментальные основания. В механике Бома такие постулаты появляются как естественное следствие статистической интерпретации теории, в основе которой лежит представление о траекториях (подобно классической механике). Данная работа представляет собой размышление о механике Бома и ее педагогическое и прикладное приложения при анализе роли квантовой фазы в различных аспектах квантовой механики. В частности, чтобы осуществить такое исследование, мы в основном сфокусируемся на явлениях квантовой когерентности и квантовой интерференции, которые являются центральными во многих фундаментальных и прикладных задачах, представляющих интерес в настоящее время.

I. ВВЕДЕНИЕ

Согласно общепринятой точке зрения на квантовую механику, наиболее полная информация о состоянии квантовой системы дается ее волновой функцией. Эта последняя дает вероятностное или статистическое описание возможных результатов, которые мы можем получить[1], когда выполняем измерение свойств такой системы. Эта интерпретация была источником противоречий в квантовой механике, ее использование приводит к жарким и нескончаемым дебатам относительно двух фундаментальных взаимосвязанных проблем[2]: полнота волновой функции (т.е. ее способность полностью описать состояние квантовой системы) и квантовое измерение (т.е. можно ли сопоставить информацию квантовой системе, если нет внешнего наблюдателя). С целью получить ответы на эти вопросы, в литературе[3,4] был выдвинут ряд теорий и моделей со скрытыми параметрами, хотя окончательное решение так и не было найдено. В данное время, следуя фон Нейману[5], квантовая механика или любая серьезная альтернатива этой теории не может быть выведена за счет простого анализа статистического приближения из детерминистской теории, подобной классической физике.

Утверждение фон Неймана, первоначально сформулированное в виде теоремы, основано на важном предварительном допущении: квантовые модели со скрытыми параметрами предполагаются локальными. Для опровержения утверждения фон Неймана о несуществовании моделей со скрытыми параметрами Бом в 1953 году предложил[6,7] физическую модель, воспроизводящую предсказания квантовой теории без какого-либо нарушения ее постулатов. Эта модель со скрытыми параметрами была основана на допущении о нелокальности, т.е. было разрешено действие на расстоянии. Как формально доказал Белл[8] в 1960-х, а позднее экспериментально проверил Аспек[9] с сотрудниками в 1980-х, квантовая механика характеризуется нелокальными корреляциями (запутыванием).

Модель Бома, сегодня широко известная как механика Бома, связана с допущением о том, что квантовая система объединяет в себе свойства волны и частицы: волна эволюционирует в соответствии с уравнением Шрёдингера, а частица движется в соответствии с условиями движения, которые делают движение частицы зависящим от эволюции волны. Начиная поздними 1970-ми и вплоть до ранних 1990-х эти идеи применялись к различным хорошо известным задачам квантовой механики с целью дать их описание с использованием концепции траекторий[7]. В настоящее время механика Бома обладает весьма привлекательным свойством: она позволяет нам понять квантовые процессы и явления на основе классических представлений, т.е. в терминах движения (в конфигурационном пространстве), связанных с пучком траекторий, который можно мыслить себе в виде квантовой жидкости. Действительно, основываясь на этой идее, в 1926 году Маделунг[10] предложил гидродинамическую модель квантовой механики, которая может рассматриваться в качестве предшественника механики Бома. Эти идеи выходили за существовавшие концептуальные и философские пределы и вывели механику Бома на более прикладной уровень, как это имеет место в течение 10 последних лет. В течение этого времени указанная теория испытала период второго рождения, пройдя путь от альтернативной гипотезы для понимания квантовой механики “без наблюдателя[11]” до хорошо известной и все более признаваемой новой квантовой интерпретации и расчетной схемы[12-15]. Эти два аспекта механики Бома Wyatt[12] назвал синтетическим и аналитическим подходами данной теории. Первый подход исходит из численных схем, развиваемых для извлечения квантовой информации без решения уравнения Шрёдингера, но с помощью его аналогов в аппарате механики Бома[16]. С другой стороны, отправной точкой для второго подхода послужила концепция квантовых траекторий на основе волновой функции как средство интерпретации реалистических экспериментов, которые могли быть построены для дифракции атомов редких газов на металлических поверхностях[17]. После это в литературе появилось много различных исследований, в которых используется первый или второй подход либо даже оба сразу; исследования породили большой поток публикаций[13-15].

Задачей настоящей работы является показать, как механика Бома помогает нам глубже понимать квантовую механику и извлекать больше информации из нее. Это является важным преимуществом с точки зрения изучения и понимания физики за рамками квантовой механики и уже отмечалось Беллом[18]. В частности, здесь мы, используя эту теорию, сфокусируем наше обсуждение на роли квантовой фазы, которая играет ключевую роль в таких явлениях, как квантовая когерентность, интерференция, дифракция или запутывание. Как мы увидим, когда внимание в первую очередь уделяется плотности потока квантовой вероятности вместо плотности вероятности, возникают весьма интересные и важные свойства. Эти свойства очень ярко проявляются благодаря механике Бома, хотя это общеизвестные квантовые свойства, которые обычно “маскируются” в общепринятой версии квантовой механики (если мы их там не видим, то только потому, что редко обращаем внимание на величины, динамически зависящие от квантовой фазы, такие, как например плотность потока квантовой вероятности). В более широком аспекте эта ситуация подобна ситуации с квантовой нелокальностью[8]; хотя она всегда присутствует, отчетливо она становится видна в экспериментах, подобных ЭПРБ. Более того, отнюдь не только в качестве академического упражнения следует также подчеркнуть потенциальный интерес и мощь механики Бома как на фундаментальном, так и на прикладном уровне. С фундаментальной точки зрения, благодаря оригинальному подходу, она позволяет анализировать все наши предварительные представления о квантовых процессах и явлениях. С прикладной точки зрения она имеет непосредственные приложения в таких областях, например, как интерферометрия атомов и конденсата Бозе – Эйнштейна или квантовая информатика.

Настоящая публикация построена следующим образом. В следующем разделе дается введение в базовые, формальные элементы механики Бома, а затем обсуждается их значение и связь с концепцией квантовой траектории. В разделе III мы анализируем и обсуждаем три интересных случая, в которых квантовая фаза играет фундаментальную роль вследствие свойств квантовой когерентности и интерференции. В разделе IV кратко обсуждается, как аналогичная механическая (точнее, гидродинамическая) точка зрения также может быть использована для понимания классического электромагнетизма, когда концепция траектории увязывается с потоком электромагнитной энергии. В разделе V представлены выводы нашей работы.

II. ЛИНИИ ПОТОКА, ЧАСТИЦЫ-МАРКЕРЫ И МЕХАНИКА БОМА

В механике Бома волновая функция Ψ несет динамическую информацию о том, что происходит в любой точке конфигурационного пространства и любой момент времени с квантовыми частицами, которые движутся соответствующим образом. Эта информация заложена главным образом в фазе Ψ, как легко можно понять из преобразования

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \rho^{1/2}(\mathbf{r},t)e^{iS(\mathbf{r},t)/\hbar}, \qquad (1)$$

где ρ и S – плотность вероятности и фаза функции Ψ соответственно. Обе величины являются действительными. Данное соотношение позволяет нам перейти от уравнения Шрёдингера

$$i\hbar\,\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 + V\right)\Psi, \qquad (2)$$

к системе связанных уравнений:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho\,\frac{\nabla S}{m}\right) = 0, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V + Q = 0, \qquad (4)$$

где

$$Q \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2\rho^{1/2}}{\rho^{1/2}} = \frac{\hbar^2}{4m}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\nabla\rho}{\rho}\right)^2 - \frac{\nabla^2\rho}{\rho}\right] \qquad (5)$$

есть так называемый квантовый потенциал. Уравнение (3) представляет собой уравнение непрерывности, описывающее гидродинамический ансамбль, т.е. движение пучка траекторий, вначале распределенного с некоторой плотностью ρ_0. Уравнения (4) и (5) определяют движение частиц – уравнение (4) есть квантовое уравнение Гамильтона – Якоби, которое описывает эволюцию поля фазы, управляющей движением квантовых частиц на основе (постулируемого) уравнения движения:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\nabla S}{m}. \tag{6}$$

Связь между (3) и (4) через Q (или, что эквивалентно, ρ) оказывается тем обстоятельством, которое совершенное отлично от своего классического аналога, где оба уравнения связаны только через S . Заметим, что эта связь есть в точности тот механизм, с помощью которого волновая функция направляет движение частиц. Схемы, основанные на решении (2) для Ψ и затем использовании его в (6) для определения квантовых траекторий составляют аналитический класс механики Бома[12] и существенно используются в задачах интерпретации[17]. Схемы, основанные на (3), (4) и (6) – или их гидродинамические аналоги – порождают так называемый синтетический класс (см. ниже), используемый в вычислительных алгоритмах, где рассчитываются квантовые траектории “по ходу движения”, а затем Ψ (или ρ) “синтезируется” из них.

Как упоминалось выше, история механики Бома может быть прослежена до 1926 года, когда Маделунг[10] сделал вывод относительно интерпретации волновой функции (зависящей от времени) благодаря переформулировке квантовой механике в терминах гидродинамики. Эти идеи возродились в 1970-х в работах Bialynicki-Birula[19] и Hirschfelder[20], а позже их рассматривал Wyatt[16] при разработке ряда вычислительных алгоритмов для расчета эволюции квантовых систем на основе концепции траекторий. Это привело к построению так называемых методов квантовых траекторий[12]. Мышление, подобное механике Бома, в рамках квантовой гидродинамики амплитуд дает плотность вероятности и поток плотности вероятности

$$\begin{aligned} \rho &= R^2 = \Psi^*\Psi && (7) \\ \mathbf{J} &= \rho\mathbf{v} = R^2\,\frac{\nabla S}{m} && (8) \end{aligned}$$

соответственно, которые связаны между собой уравнением непрерывности (3), поскольку

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot\mathbf{J}. \tag{9}$$

Следовательно, вместо того, чтобы говорить о траекториях, говорят о сохранении квантового потока. Разумеется, уравнение, эквивалентное (4), также может быть написано для **v**, порождая квантовые уравнения Эйлера или Навье – Стокса и решения (6) вместо описания траектории, по которой следуют частицы, лучше рассматривать как линии потока жидкости. Эти линии потока получаются при интегрировании соотношения

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{J}}{\rho}, \tag{10}$$

которое формально эквивалентно (6). Соответственно, эти линии должны соответствовать потоку, описываемому квантовой (вероятностной) жидкостью для данной системы.

Теперь немедленно возникает вопрос, что собой представляет траектория по Бому. Является ли она “реальным” путем, по которому следует квантовая частица, или просто отражает квантовую степень свободы? Чтобы приписать физический смысл бомовской траектории, необходимо, необходимо рассмотреть некоторые аспекты. В литературе мы можем найти противоречия, описанные некоторое время назад в работе Scully и его сотрудников[21], на которые до сих пор не найден ответ. Чтобы получить хотя бы промежуточный, но все же удовлетворительный ответ, рассмотрим две ситуации из классической механики.

Одно измерение не является значимым, должна быть сделана серия измерений, и пусть в качестве результата принимается среднее значение. Если конечное состояние является одним и тем же, то мы получим одинаковые результаты без какого-либо разброса. Это означает существование некоторой точки в фазовом пространстве, описывающую степень свободы, связанную с измеряемым свойством. Однако на самом деле всегда будут иметь место определенные отклонения, так что вместо точки результат будет изображаться некоторой плотностью функции распределения, т.е. в точности так, как это делается в статистической механике.

Во-вторых, рассмотрим (классическую) сплошную среду. Она состоит из многих различных частиц (атомов, ионов, молекул и т.д.), все степени свободы описываются набором связанных дифференциальных уравнений, причем число уравнений совпадает с числом степеней свободы. Пусть нас интересует не микроскопическое описание среды, а лишь макроскопическое описание с помощью уравнения типа уравнения Эйлера или Навье - Стокса, которое феноменологически описывает эволюцию сплошной среды, не уделяя внимания микроскопической динамике ее составляющих. Именно на этом построены основы гидродинамики. В таком случае для экспериментального изучения поведения среды обычно следят за движением некоторых частиц, а именно частиц-маркеров, которые позволяют визуализировать динамику потока при движении вдоль линий его течения, совпадающим с линиями переноса энергии. Например, если мы хотим наблюдать эволюцию потока воздуха, то можем следить за распространением дыма сигареты; для слежения за потоком воды можно использовать другую жидкость типа чернил или мелкие плавающие частицы типа пыльцы или крошки древесного угля. На космологических масштабах такой гидродинамический подход также может быть использован благодаря использованию в качестве частиц-маркеров звезд, галактик или их скоплений.

После этих отступлений вернемся снова к механике Бома и смыслу квантовой траектории, а также к бомовской частице. В ходе реальных интерференционных экспериментов с единичными фотонами[22,23] мы можем наблюдать, как эти квантовые частицы ведут себя, наподобие первой из вышеупомянутых ситуаций: одиночное измерение или детектирование не является значимым, но в большом количестве необходимы для визуализации интерференционной картины и, следовательно, получения информации о дифрагирующей частице либо о рассеивающем объекте. Таким образом, реальные отдельные квантовые частицы ведут себя как корпускулы, хотя их распределение обнаруживает волновые свойства согласно уравнению Шрёдингера (2) или его бомовским эквивалентам, уравнениям (3) и (4). Следовательно, очевидно, что свойства ансамбля требуется описывать коллективно, т.е. функцией плотности распределения, роль которой выполняет плотность вероятности в квантовой механике или, на более элементарном уровне, волновая функция. Это соответствует статистической интерпретации Борна для квантовой механики. Теперь, если (отдельные) частицы рассматриваются как движущиеся вдоль отдельных траекторий, получаются ли эти траектории из (6)? В принципе, бомовские траектории воспроизводят все свойства квантовой механики, и тогда следует думать что реальные частицы всегда движутся как бомовские частицы (т.е. частицы, подчиняющиеся динамике Бома). Однако, если уравнения Бома понимаются как уравнения гидродинамики, то траектории, полученные из (6), не обязательно могут (должны) рассматриваться как траектории реальных частиц, но скорее как линии потока, ассоциированного с квантовой жидкостью, как во второй из описанных выше ситуаций (действительно, заметим, что уравнение Шрёдингера обычно описывает не “истинную” частицу, а степень свободы). То есть в принципе бомовские частицы играют роль классических частиц-маркеров, позволяя нам наблюдать динамические свойства квантовой жидкости, которая обычно рассматривается как “скрытая” при изучении с помощью формализма волновой функции.

Вышеприведенное обсуждение дает нам возможность сопоставить бомовские траектории с некоторой реальностью, хотя вопрос остается открытым. Таким образом, теперь мы можем продолжить изучение квантовых процессов и явлений в рамках гидродинамических представлений без затруднений, что позволяет нам использовать тот же язык и концепции. С другой стороны, с фундаментальной точки зрения имеется еще один интересный вопрос: должно ли уравнение Шрёдингера интерпретироваться как феноменологическое уравнение для описания коллективного поведения частиц, для которого у нас нет подходящей теории движения? Это немедленно приводит к вопросу о существовании субквантовой среды[24], частицы которой совершают движение, подобное броуновскому. После усреднения можно получить уравнение Шрёдингера[25] или уравнение Дирака[26] для частиц со спином – действительно, Бом и Вижье[27] также рассматривали субквантовое стохастическое обобщение механики Бома вскоре после статей Бома 1952 года. Однако, несмотря на интерес к этому обсуждению, мы не будем здесь этим заниматься, поскольку это выходит за рамки настоящей работы.

III. РОЛЬ КВАНТОВОЙ ФАЗЫ

A. Свободно распространяющиеся гауссовы волновые пакеты

С целью как следует понять роль квантовой фазы, равно как особенности квантовой когерентности, рассмотрим сначала свободно распространяющийся одномерный гауссов волновой пакет:

$$\Psi(x,t) = \left(\frac{1}{2\pi\tilde{\sigma}_t^2}\right)^{1/4} e^{-(x-v_0t)^2/4\tilde{\sigma}_t\sigma_0 + ip_0(x-v_0t)/\hbar + iEt/\hbar}. \tag{11}$$

Этот волновой пакет движется вдоль классической траектории $x_{\rm cl} = v_0 t$ (для простоты мы положили $x_{\rm cl,0} = 0$) и распространяется со временем согласно соотношению

$$\sigma_t = |\tilde{\sigma}_t| = \sigma_0\sqrt{1 + \left(\frac{\hbar t}{2m\sigma_0^2}\right)^2}. \tag{12}$$

Извлекая S из (11) и затем подставляя эту величину в (6), мы получаем общее выражение для соответствующих квантовых траекторий, т.е. для траекторий, которые квантовые частицы-маркеры должны демонстрировать, будучи связаны с (квантовым) потоком, представленным волновой функцией (11). Общее выражение для квантовых траекторий, ассоциированных с (11), тогда будет иметь вид

$$x(t) = v_0 t + \frac{\sigma_t}{\sigma_0}\, x_0, \qquad (13)$$

где x_0 – начальное положение соответствующей траектории,

В (13) мы можем четко выделить два вклада, которые управляют поведением во времени свободно распространяющегося гауссова пакетом (хотя то же самое может быть сказано в отношении других волновых пакетов более общего вида). Во-первых, это классическое перемещение, которое заставляет любую квантовую траекторию движения сдвигаться к соответствующему классическому пути. Это может рассматриваться как критерий классичности в бомовской механике – действительно, это может быть связано с теоремой Эренфеста, как будет показано ниже. Второй вклад представляет собой квантовое перемещение (или перемещение квантовой жидкости), который свойствен (квантовой) природе эволюции Ψ и описывает (свободное) распространение волнового пакета во времени. Поскольку траектории "направляются" квантовой жидкостью (можно сказать, что бомовские частицы "оседлали" волну), то это приводит к их расслоению с неравномерной скоростью

$$v_s \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{\sigma_0}{\sigma_t}\frac{t}{\tau^2}\, x_0, \qquad (14)$$

где $\tau \equiv 2m\sigma_0^2/\hbar$. Другими словами, свободное распространение воплощается в ускоренном квантовом движении подобно тому, что происходит в классической механике. Соответственно, классический предел должен тогда состоять в сохранении этого относительно малого члена, откуда следует, что квантовые траектории должны быть параллельны классическим $x_{\rm cl}$, что соответствует теореме Эренфеста.

Исследуя (12), мы видим появление двух временных масштабов[28]. Если $t \ll \tau$, то волновой пакет расширяется незначительно $(\sigma_t \approx \sigma_0)$, и квантовые траектории существенно параллельны классическим $x_{\rm cl}$ (критерий Эренфеста или классичности), поскольку $x(t) \approx x_0 + v_0 t$. В этом случае классический дрейф дает доминирующий вклад. По мере роста *t*, в силу уравнения (13), помимо линейного роста во времени мы начинаем наблюдать действие квантовой компоненты скорости. Это приводит к нарастанию ускоренного движения, которое на ранних стадиях может быть описано с помощью знакомого выражения классической механики

$$x(t) \approx x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\, a_q t^2, \qquad (15)$$

где $a_q \equiv x_0/\tau^2$ зависит от начального положения частицы – чем дальше частица от центра волнового пакета, тем сильнее эффект этого квантового ускорения. Результат виден на рис. 1(a). По мере асимптотического роста времени $(t \gg \tau)$ мы видим, что σ_t приближается к линейной зависимости от времени, и волновой пакет кажется не меняющимся со временем. В оптике это так называемый режим Фраунгофера, когда фазы линейно зависят от координат и, следовательно, форма

Ψ остается инвариантной при смене временного масштаба. В этом случае квантовые траектории описываются соотношением

$$x(t) \approx \left(v_0 + \frac{x_0}{\tau}\right) t, \qquad (16)$$

т.е. асимптотическое движение снова становится равномерным, но с соответствующей (постоянной) скоростью, обладающей компонентой, которая пропорциональна начальному положению траектории, как показано на рис. 1(b). Эта необычная квантовомеханическая компонента очень важна: в случае дифракции на периодических структурах, например, она точно соответствует той, которая связана с различными дифракционными каналами[29] или с передачей импульса в кристалле[17].

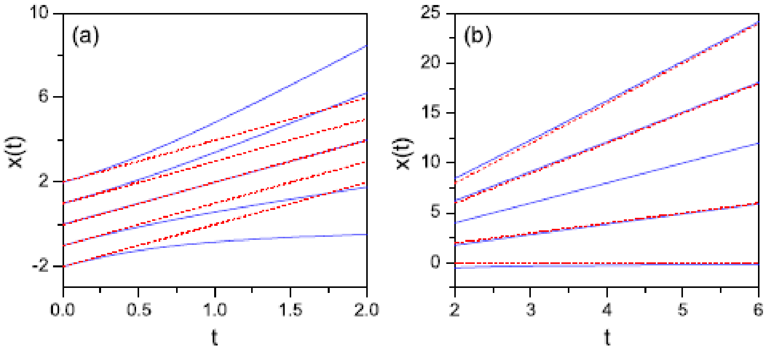

Рисунок 1.
Свободное распространение гауссового волнового пакета: (a) короткое время (режим Эренфеста), и (b) длительное время (режим Фраунгофера). Квантовые траектории указаны сплошными голубыми линиями, тогда как их классические аналоги представлены пунктирными красными линиями.

В итоге, исследуя топологию квантовых траекторий, мы замечаем, что квантовый поток эволюционирует от начально сконцентрированной жидкости к линейно расширяющейся форме, и это происходит за время порядка τ - тип внутреннего роста давления, приводящего к расширению. Если вместо гауссова волнового пакета рассмотреть пакет прямоугольной формы (построенный из собственных значений прямоугольной потенциальной ямы), то, когда этот пакет освобождается, мы наблюдаем фрактальные свойства[30]. Эти свойства становятся очень заметными при наблюдении соответствующих квантовых траекторий, которые образуют фрактальные кривые[31].

B. Суперпозиция волновых пакетов

Основываясь на вышеописанном поведении квантовых траекторий, мы теперь можем найти практические критерии для выяснения того, может ли долгосрочная динамика показать временную или постоянную интерференцию при рассмотрении двух волновых пакетов. Для этого сосредоточимся на скорости распространения $p_s = mv_s \equiv \hbar/2\sigma_0$, которая ассоциируется со скоростью распространения волнового пакета[32], как мы видели выше. Полагая $x_0 \sim \sigma_0$, уравнение (16) можно выразить в виде $x(t) \approx (v_0 + v_s)\, t$, что позволяет обнаружить асимптотические интерференционные свойства, рассматривая только начальные условия для параметров. Так, если $v_0 \gg v_s$, то классическое распространение становится доминирующим (т.е. расплывание волнового пакета не будет существенным, несмотря на его динамику), тогда как при $v_0 \ll v_s$ квантовые эффекты (расплывание) проявятся очень быстро на относительно коротких расстояниях. Следовательно, при суперпозиции волнового пакета типа

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \psi_1(\mathbf{r},t) + \psi_2(\mathbf{r},t), \qquad (17)$$

где $\psi_i = \rho_i^{1/2} e^{iS_i/\hbar}$ - гауссовы волновые пакеты вида (11), движущиеся в противоположных направлениях, могут произойти две ситуации[32], похожие, соответственно, на столкновение или на интерференцию. В первом случае волновые пакеты останутся после взаимодействия хорошо локализованными, тогда как во втором случае они не могут быть разрешены один относительно другого вследствие постоянного присутствия интерференционной картины.

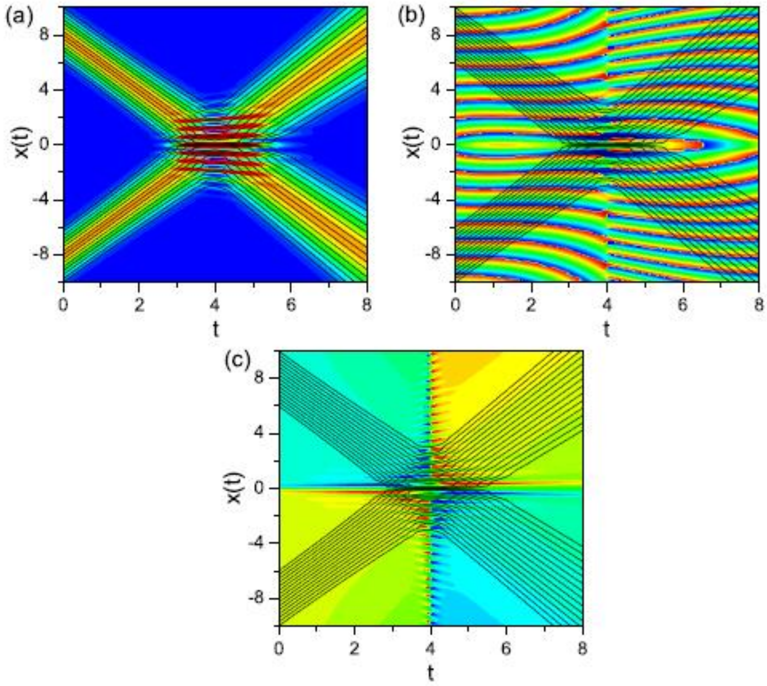

Рисунок 2: плотность вероятности (a), фаза (b) и поле скоростей (c) для лобового столкновения двух когерентных гауссовых пакетов при $v_0 \gg v_s$. Цветовая шкала, от синего до красного, обозначает возрастающие значения соответствующих полей; сплошные черные линии соответствуют бомовским траекториям, начинающимся в различных начальных положениях.

Из (17) легко найти, что

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1 + \rho_2 + 2\sqrt{\rho_1\rho_2}\cos\varphi, && (18) \\ \mathbf{J} &= \frac{1}{m}\,\mathrm{Re}\,(\Psi^*\hat{\mathbf{p}}\Psi) = -\frac{i\hbar}{2m}\,(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) \\ &= \frac{1}{m}\Big[\rho_1\nabla S_1 + \rho_2\nabla S_2 + \sqrt{\rho_1\rho_2}\nabla(S_1+S_2)\cos\varphi \\ &\quad +\hbar\left(\rho_1^{1/2}\nabla\rho_2^{1/2} - \rho_2^{1/2}\nabla\rho_1^{1/2}\right)\sin\varphi\Big], && (19) \end{aligned}$$

откуда при подстановке в (10) получаем

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m}\frac{\rho_1 \nabla S_1 + \alpha\rho_2\nabla S_2 + \sqrt{\alpha}\sqrt{\rho_1\rho_2}\nabla(S_1+S_2)\cos\varphi}{\rho_1 + \alpha\rho_2 + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\rho_1\rho_2}\sin\varphi} + \sqrt{\alpha}\,\frac{\hbar}{m}\frac{\left(\rho_1^{1/2}\nabla\rho_2^{1/2} - \rho_2^{1/2}\nabla\rho_1^{1/2}\right)\sin\varphi}{\rho_1 + \alpha\rho_2 + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\rho_1\rho_2}\cos\varphi}. \tag{20}$$

Выражения (19) и (20), которые можно также вывести и в стандартной квантовой механике, содержат самую суть этой теории, а именно – прямой смысл квантовой когерентности. Однако им не уделяется много внимания (за исключением вычисления потоков через поверхности, как и процессов с участием туннелирования и рассеяния), поскольку обычно сосредотачиваются на плотности вероятности. Чтобы подчеркнуть важность потоков плотности квантовой вероятности и квантовых полей скоростей, рассмотрим, как (17) представляет суперпозицию двух гауссовых волновых пакетов, движущихся навстречу один другому, как показано на рис. 2. На этом рисунке контурные графики иллюстрируют эволюцию во времени плотности вероятности (a), фазы поля (b) и поля скоростей (c); далее, на трех диаграммах бомовские диаграммы (черные сплошные линии) указывают направление квантовой жидкости в каждый момент времени. Хотя вначале нет видимого перекрытия между двумя волновыми пакетами, факт присутствия обоих индуцирует очень хорошо определенную фазу и поля скоростей в области между ними, которой нельзя пренебрегать при анализе динамики траектории или фазы. Действительно, это транслируется в отсутствие пересечения траекторий, приходящих от двух разных динамических областей в один и тот же момент времени в одной и той же точке. Это так называемое свойство непересекаемости бомовских траекторий[7]. Тот факт, что фаза определяет отдельные области с очень разным динамическим поведением имеет очень важное практическое следствие: оно очень серьезно должно учитываться в любом основанном на концепции траекторий алгоритме и явно использоваться в алгоритме, где имеет место интерференция, чтобы обеспечить корректную процедуру распространения.

Свойство непересекаемости бомовских траекторий заставляет думать о наличии эффективного потенциала, отличного от Q и возникающего только из квантовой фазы, который мог бы быть ответственным за этот эффект. Модель простой прямоугольной ямы для этого потенциала выглядит так[32]:

$$V(t) = \begin{cases} 0, & x < x_{\min}(t) \\ -V_0(t), & x_{\min}(t) \le x \le 0 \\ \infty, & 0 < x \end{cases}, \tag{21}$$

где ширина и глубина прямоугольной ямы равны соответственно:

$$x_{\min}(t) = \frac{\pi\sigma_t^2}{\dfrac{2p_0\sigma_0^2}{\hbar} + \dfrac{\hbar t}{2m\sigma_0^2}\,x_0}, \tag{22}$$

$$V_0(t) = \frac{2\hbar^2}{m}\frac{1}{x_{\min}^2(t)}, \tag{23}$$

На рис. 2 представлены плотность вероятности, фаза и поле скоростей для лобового столкновения двух когерентных гауссовых пакетов при $v_0 \gg v_s$. На рис.3

представлены величины $x_{\min}$ (a) и V_0 (b) как функции времени для различных значений трансляционного импульса p_0. В качестве приложения этой простой модели мы можем видеть на рис. 4, как столкновение волнового пакета с потенциалом такого типа воспроизводит основные свойства лобового столкновения двух волновых пакетов.

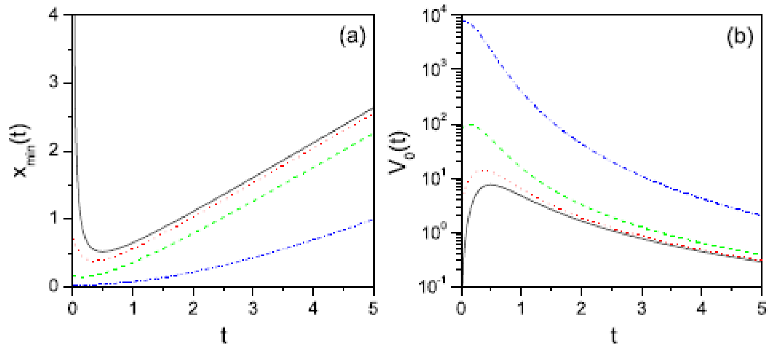

Рисунок 3: Эффективный динамический потенциал. Величины $x_{\min}$ (a) и V_0 (b) как функции времени для различных значений трансляционного импульса p_0.

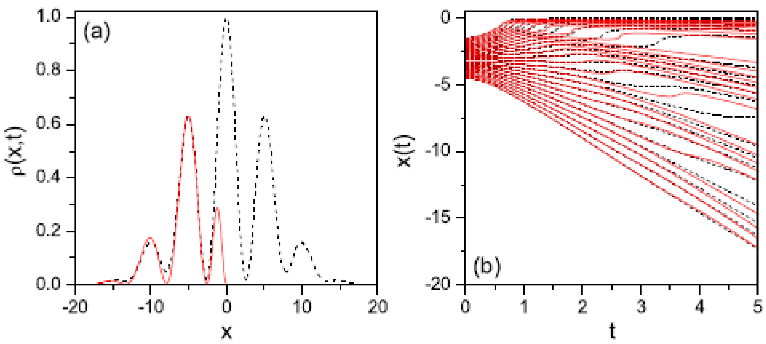

Рисунок 4: Когерентная суперпозиции двух сближающихся гауссовых волновых пакетов (черные пунктирные линии), у обоих темп расплывания больше, чем их скорость распространения: (a) плотность вероятности в момент максимальной интерференции, и (b) бомовские траектории. Эта задача может быть заменена задачей о столкновении одиночного гауссова волнового пакета с эффективным динамическим потенциалом, подобно тому, что дается уравнением (21). Результаты, связанные с этой последней задачей, показаны красной сплошной линии.

Модели, более тонкие, чем (21), могут быть рассмотрены, чтобы получить соответствие с траекториями, приходящими от интерференции двух волновых пакетов. Однако важно подчеркнуть, что с точки зрения динамической перспективы задача о суперпозиции волновых пакетов эквивалентна рассеянию одиночного волнового пакета на эффективном (динамическом) потенциале – с классической точки зрения, нечто подобное происходит, когда столкновения двух тел заменяют столкновением “эффекивного” тела, а именно системы с редуцированной массой, на которое действует “эффективная” центральная сила. Этим подчеркивается различие между математикой и физикой принципа суперпозиции: различие становится более ясным, когда мы смотрим на соответствующие квантовые траектории, хотя оно изначально содержится в стандартной версии квантовой механики – следует лишь посмотреть на квантовую фазу или некоторую связанную с ней величину , такую, как $\mathbf{J}$ или $\mathbf{v}$. Далее, отметим, что эффективный потенциал (21) никак не связан с квантовым потенцилом, ассоциируемым с суперпозицией волновых пакетов (см., например, работу с изображением квантового потенциала для двухщелевой задачи).

Происхождение (21) является простым следствием свойства квантовой когеренции (квантовой фазы), а не плотности вероятности самой по себе, как если бы она была квантовым потенциалом.

Квантовая когерентностность и ее бомовский эффект, а именно – свойство непересекаемости – приводит к тому, что, по крайней мере, с теоретической точки зрения, позволяет рассмотреть щель, пересекаемую частицей без возмущения ее двухщелевым экспериментом, например. В пределе бесконечного числа щелей этот эффект становится более значительным, квантовые траектории утончаются в ходе эволюции вдоль каналов. То есть траектории, исходящие от конкретной щели, сохраняют свое движение в области, ограниченной границами этой щели. Это образует бомовскую точку зрения на так называемые периодические граничные условия Борна – фон Кармана для системы многих щелей и приводит к так называемому эффекта Тэлбота[29]. Если, с другой стороны, мы рассматриваем комплексифицированную версию бомовской динамики, то возникают иной и интересный взгляд на квантовую интерференцию[34,35]. В этом случае было показано[34], что бомовская траектория может рассматриваться в качестве кривой, образованной пересечением бесконечного числа комплексных квантовых траекторий с действительной осью, причем каждая такая траектория пересекается с действительной осью в свой момент времени. Иными словами, единичная бомовская траектория описывает “семейство” комплексных бомовских траекторий[34]. Далее, исходя из отображения очень интересной динамики, с практической точки зрения комплексные квантовые траектории могут быть для определения средних времен пребывания, учитывающих продолжительность интерференционных явлений[35].

C. Интерференция в сложных системах

В более сложных задачах интерференция и квантовая фаза также играют важную роль. Например, при рассеянии атомов редких газов на поверхности металлов с примесью[36] мы можем отчетливо наблюдать формирование вращательной динамики из-за перекрытия входящего и выходящего волновых фронтов. Это математическое перекрытие между двумя решениями (прямой и обратной волной) приводит к физическому влиянию на квантовые траектории, которые могут образовывать петли и казаться временно замороженными вдоль поверхности. Действительно, если вместо задач рассеяния типа динамических границ мы рассмотрим описание химических реакций, где переход от реагентов к продуктам достигается подъемом до максимума, интерференция может значимо определять течение реакции. При таком подходе задача туннелирования сразу принимает следующий вид. Мы знаем, что задачи туннелирования обычно связаны с задачами о потенциальном барьере, где размерность сложной задачи существенно снижена до единицы, именно до координаты линии реации на поверхности, тогда вычисляется вероятность соответствующей передачи. Это может привести к серьезным ошибкам. В одном измерении есть лишь единственный способ перейти от реагентов к продуктам реакции, и, следовательно, если наблюдается прохождение со средней энергией, меньшей чем вершина потенциального барьера (т.е. запрещенное законами классической механики), мы говорим об эффекте туннелирования. Однако при большем числе измерений этот критерий в общем случае несправедлив.

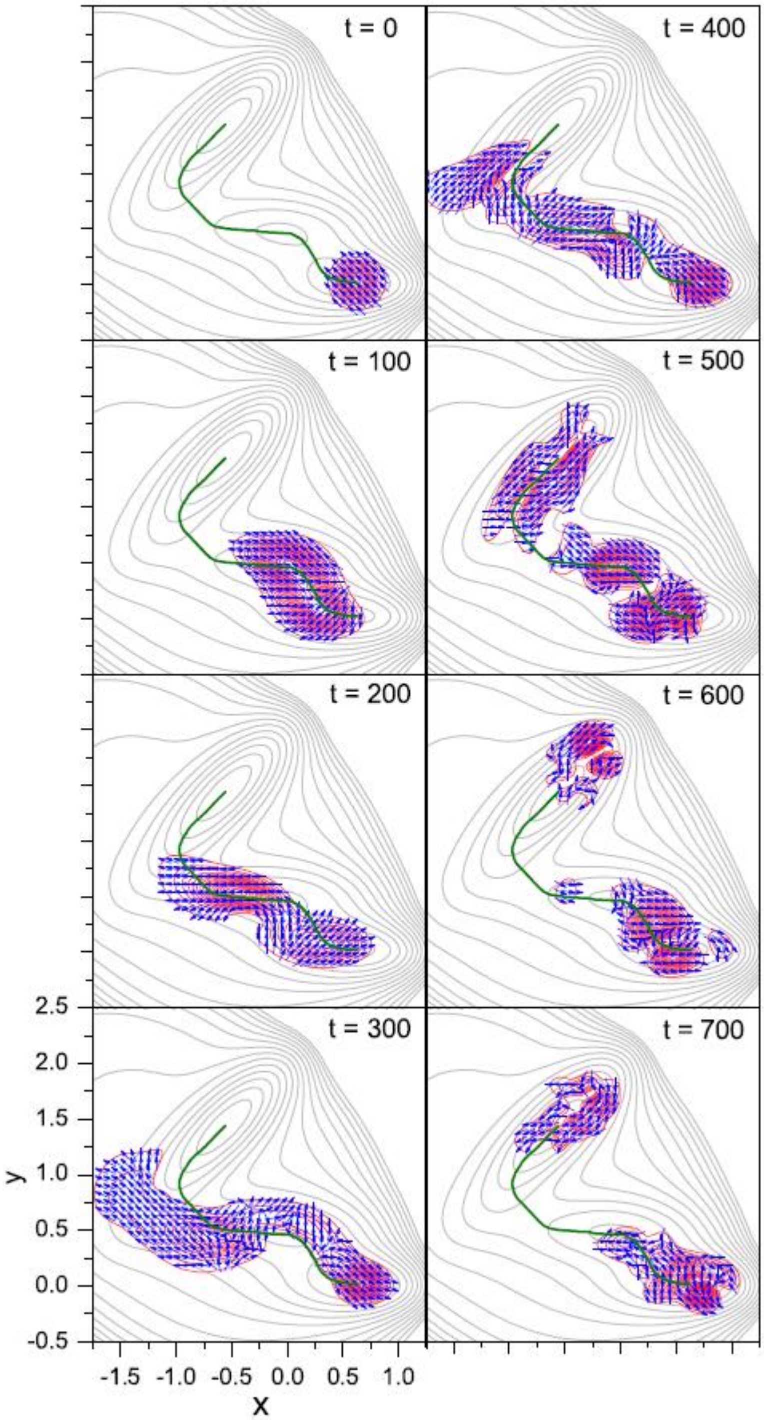

Рисунок 5: контуры плотности вероятности и карта направлений в поле скоростей для гауссового волнового пакета, эволюционирующего в типичном потенциале, который воспроизводит переход от реагентов к продуктам в зимической реакции[37].

Чтобы проиллюстрировать вышесказанное, рассмотрим динамику, связанную с типичной химической реакцией, которая показана в виде серии снимков на рис. 5. В каждой рамке плотность вероятности представлена набором контуров (красные сплошные линии), а синие стрелки обозначают локальное направление связанного вектора поля скоростей, как определено уравнением (10). Эти два элемента очень хорошо иллюстрируют квантовую динамику реакции. Как можно видеть, имеется поток вероятности, который проходит через барьер в область продуктов, в то время как другая часть потока остается в области реагентов, где вследствие интерференции развиваются вихри. Если проделать расчеты передачи вероятностей для классических и квантовых траекторий, то результат получится весьма неожиданным: при меньших энергиях шанс наблюдать формирование продуктов больше для классических частиц, нежели для квантовых[37]. Причина этого может быть связана с образованием завихрений, которые ликвидируют большее проникновение квантовых траекторий в продукты, тогда как меньшее количество энергии с классической точки зрения означает, что (классическая) динамика глаже, и больше траекторий могут пройти к продуктам. По мере увеличения энергии ситуация инвертируется; давление квантовой жидкости больше, и больше квантовых траекторий могут попасть к продуктам, тогда как классические частицы имеют больший импульс и, следовательно, динамика в конечном счете становится более сложной (хаотичной).

IV. ОПТИЧЕСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА И ТРАЕКТОРИИ ФОТОНОВ

До сих пор бомовская механика была рассмотрена так, как ее формально описал Бом, т.е. применительно только к волновым свойствам частиц с массой (напомним, что он исходил из преобразования уравнения Шрёдингера для комплексной функции в систему уравнений для двух действительных величин – модуля и фазы волновой функции). Однако такой же подход может быть использован для излучения (фотонов, по терминологии Эйнштейна, т.е. безмассовых частиц). Анализ с этой точки зрения излучения интересен, поскольку недавно были выполнены эксперименты[38], где было получено прекрасное соответствие картины интерференции совокупности единичных отсчетов детектора фотонов, аналогично ситуации с массивными частицами[22,23]: картина интерференции была реконструирована на основании счетчика единичных фотонов или, в классической терминологии, индивидуальных детектирований электромагнитных возбуждений детектора фотонов. Дуамая об этих экспериментах, немедленно можно задать естественный вопрос: возможно ли найти способ воспроизвести их с помощью теории счетчика единичных событий.

Оставляя за скобками вопросы о природе фотонов или существовании волновой функции фотона[39], мы можем поступить так, как это обсуждалось в разделе II и рассматривать фотон как частицу типа бомовской, которая эволюционирует под управлением некоторого поля, в данном случае - электромагнитного. То есть фотон (в соответствии с этим частным подходом) должен представлять собой частицу – маркер, которая позволяет нам “визуализировать” поток электромагнитного поля; тогда статистика падающих фотонов должна продемонстрировать нам соответствующую интерференционные и дифракционные свойства, которые наблюдаются экспериментально. Различие между волновой функцией и электромагнитным полем состоит в том, что первое является полем “вероятности” (По крайней мере, насколько нам известно), тогда как второе характеризуется некоторыми физически измеримыми величинами. В частности, поскольку параметры интерференции в экспериментах с излучением прямо пропорциональны плотности энергии электромагнитного поля, движение этих фотонов должно “направляться” функцией плотности электромагнитной энергии. При таком подходе мы уверены, что несмотря на возможный случайный характер регистрации фотонов, их финальное распределение находится в согласии с функцией плотности электромагнитной энергии (электромагнитного аналога квантовой плотности вероятности).

Учтем решающее обстоятельство, связывающее ρ и $\mathbf{J}$ и определяющее основные уравнения движения. Как показал Prosser[40], это может быть сделано с помощью анализа электромагнетизма Максвелла, который позволяет установить аналогию с волновой механикой Шрёдингера[41]. Вполне естественно рассматривать обе теории, описывающие волновые поля, выйдя за первоначальные геометрические представления (лучи и траектории), но сделав определенный шаг перед квантованием таких полей. Следуя этим путем, мы легко идентифицируем три ключевых элемента, которые нам необходимы:

- плотность, задаваемая плотностью электромагнитной энергии;
- плотность потока, задаваемая вектором Пойнтинга;
- векторное поле скоростей, которое определяется их отношением.

Следовательно, если электромагнитное поле характеризуется электрическим полем $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и магнитным полем $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$, то

$$U(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4}\left[\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{E}^*(\mathbf{r},t) + \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{H}^*(\mathbf{r},t)\right]. \qquad (24)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}^*(\mathbf{r},t)\right], \qquad (25)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{S}(\mathbf{r},t)}{U(\mathbf{r},t)}, \qquad (26)$$

что аналогично уравнениям (7), (8) и (10), соответственно. В соответствии с этой схемой уравнение непрерывности (26) возникает из того факта, что плотность электромагнитной энергии переносится в пространстве в виде вектора Пойнтинга[42]

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = U(\mathbf{r},t)\mathbf{v}. \qquad (27)$$

Эти соотношения (на самом деле, их усредненные аналоги) были недавно использованы для выполнения ряда исследований поляризованного света[39,43,44] и показали замечательное соответствие между хорошо известной картиной интерференции и счетчиками поступающих фотонов[44].

V. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Нашей задачей в этой публикации было представить понятную программу педагогических преимуществ бомовской механики для понимания физических следствий квантовой механики за пределами этой теории, в том числе в отношении когерентности, интерференции или обобщения на электромагнитные поля. Благодаря такой переформулировке квантовой механики мы увидели различные перспективы квантовых явлений и узнали альтернативную информацию, которую обычно несет квантовая фаза, а не плотность распределения. Тот факт, что бомовская механика основана на траекториях, делает эту информацию более наглядной, поскольку эволюция бомовских частиц (понимя эти частицы в смысле обсуждения в разделе II) зависит непосредственно от квантовой фазы и, следовательно, позволяет нам отслеживать связанные с ней любые динамические свойства.

Следует учитывать, что бомовская, или гидродинамическая, формулировка квантовой механики представляет потенциальный интерес как с фундаментальной, так и с прикладной точек зрения. С фундаментальной точки зрения она предоставляет идеальную концепцию для анализа и переосмысления всех наших стандартных представлений о квантовых процессах и явлениях, т.е. какими они должны были бы быть. В частности, мы показали, что физика процессов интерференции радикально меняется, когда мы переключаемся с математического на физический анализ принципа суперпозиции. Хотя с математической точки зрения этот принцип кажется “невинным” средством для решения дифференциальных уравнений в частных производных путем добавления более простых решений (иногда отражаемых в собственной математической структуре гильбертова пространства), физические (динамические) следствия оказываются очень далекими от простоты, выявляя поведение, которое от непересекаемости потоков приходит к вихревой динамике. Тот же анализ и те же концепции могут быть непосредственно обобщены на электромагнитное излучение, которое также может быть описано с помощью метода траекторий, что кратко обсуждалось в разделе IV.

Очевидно, столь фундаментальный вывод должен проверяться при экспериментальном исследовании соответствующих явлений. В случае интерференции мы установили, что это явление имеет прямые применения применительно к атомам и конденсату Бозе – Эйнштейна, квантовой информатике или квантовому управлению, например. В этом смысле механика Бома может быть важна для понимания таких процессов, как декогеренция или квантовое стирание информации. Как мы знаем, квантовая динамика тесно связана с квантовой фазой и, следовательно, любая привязка к динамике квантового потока может быть очень важна для понимания процессов, в которых квантовая фаза является значимой. Заметим, что за исключением таких случаев, как эффект Ааронова – Бома[45] или эффект Джозефсона[46], где квантовая фаза играет ключевую роль, ей уделялось мало внимания до тех пор, пока задачи квантовой информатики и квантового управления не привели к пониманию ее важности. Не произошло обобщения в применении квантовых потоков плотности и квантовых полей скорости. Причины этого могут заключаться в том, что в противоположность плотностям вероятностей (т.е. интенсивностям, вероятностям перехода, коэффициентам отражения, кросс-сечениям, и т.д.), такие поля непосредственно не наблюдаемы. Однако они порождают косвенные следствия, о которых говорилось выше, и которые являются наблюдаемыми.

Благодарности. Мы благодарим за поддержку Министерство науки и инноваций (Испания) в рамках проектов FIS2010-18132 и FIS2010-22082. A. S. Sanz также выражает благодарность той же организации за “Ramón y Cajal” Research Fellowship.

Ссылки

1 L. E. Ballentine, *Quantum Mechanics. A Modern Development* (World Scientific, Singapore, 1998).
2 Zurek and Wheeler, *Quantum Theory of Measurement* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1983).
3 F. J. Belinfante, *A Survey of Hidden-Variables Theories* (Pergamon, New York, 1973).
4 G. Tarozzi and A. van der Merwe (eds.), *Open Questions in Quantum Physics* (Reidel, Dordrecht, 1985).
5 J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Springer, Berlin, 1932).
6 D. Bohm, *A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables. I*, Phys. Rev. 85, 166-179 (1952); *A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables. II*, Phys. Rev. 85, 180-193 (1952).
7 P. R. Holland, *The Quantum Theory of Motion* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).

8 J. S. Bell, “On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox”, Physics 1, 195–200 (1964); J. S. Bell, “On the problem of hidden variables in quantum mechanics”, Rev. Mod. Phys. 38, 447–452 (1966).
9 A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, “Experimental tests of realistic local theories via Bell’s theorem,” Phys. Rev. Lett. 47, 460–463 (1981); A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, “Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm gedankenexperiment: A new violation of Bell’s inequalities,” Phys. Rev. Lett. 49, 91–94 (1982); A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, “Experimental test of Bell’s inequalities using time-varying analyzers,” Phys. Rev. Lett. 49, 1804–1807 (1982).
10 E. Madelung, “Quantentheorie in hydrodynamischer Form,” Z. Physik 40, 322–326 (1926).
11 S. Goldstein, *Quantum theory without observers - Part I*,” Phys. Today 51(3), 42–46 (1998); S. Goldstein, “Quantum theory without observers - Part II,” Phys. Today 51(4), 38–42 (1998).
12 R. E. Wyatt, *Quantum Dynamics with Trajectories* (Springer, Berlin, 2006).
13 P. K. Chattaraj (Ed.), *Quantum Trajectories* (CRC Taylor and Francis, New York, 2010).
14 X. Oriols and J. Mompart (Eds.), *Applied Bohmian Mechanics: From Nanoscale Systems to Cosmology* (Pan Standford Publishing, Singapore, ‘to be published’).
15 A. S. Sanz and S. Miret-Artés, *A Trajectory Description of Quantum Processes. I. Fundamentals*, Springer Series: Lecture Notes on Physics (Springer, Berlin, ‘to be published’);
A. S. Sanz and S. Miret-Artés, *A Trajectory Description of Quantum Processes. II. Applications*, Springer Series: Lecture Notes on Physics (Springer, Berlin, ‘to be published’).
16 C. Lopreore and R. E. Wyatt, “Quantum wave packet dynamics with trajectories,” Phys. Rev. Lett. 82, 5190–5193 (1999).
17 A. S. Sanz, F. Borondo, and S. Miret-Artés, “Causal trajectories description of atom diffraction by surfaces,” Phys. Rev. B 61, 7743–7751 (2000); A. S. Sanz, F. Borondo, and S. Miret-Art´es, “On the classical limit in atom-surface diffraction,” Europhys. Lett. 55, 303–309 (2001).
18 J. S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
19 I. Bialynicki-Birula and Z. Bialynicka-Birula, “Magnetic monopoles in the hydrodynamic formulation of quantum mechanics,” Phys. Rev. D 3, 2410–2412 (1971); I. Bialynicki-Birula, M. Cieplak, and J. Kaminski, *Theory of Quanta* (Oxford University Press, Oxford, 1992).
20 J. O. Hirschfelder, A. C. Christoph, and W. E. Palke, “Quantum mechanical streamlines. I. Square potential barrier,” J. Chem. Phys. 61, 5435–5455 (1974); J. O. Hirschfelder, C. J. Goebel, and L. W. Bruch, Quantized vortices around wavefunction nodes. II, J. Chem. Phys. 61 (1974) 5456–5459; J. O. Hirschfelder and K. T. Tang, Quantum mechanical streamlines. III. Idealized reactive atom-diatomic molecule collision, J. Chem. Phys. 64 760–785 (1976); J. O. Hirschfelder and K. T. Tang, “Quantum mechanical streamlines. IV. Collision of two sphere with square potential wells or barriers,” J. Chem. Phys. 65 470–486 (1976).
21 B.-G. Englert, M. O. Scully, G. S¨ussmann, and H.Walther, “Surrealistic Bohm trajectories,” Z. Naturforsch. A 47, 1175–1186 (1993); D. D¨urr, W. Fusseder, S. Goldstein, and N. Zangh`ı, “Comment on ‘Surrealistic Bohm trajectories’,” Z. Naturforsch. A 48, 1261–1262 (1993); B.-G. Englert, M. O. Scully, G. S¨ussmann, and H. Walther, “Reply to comment on ‘Surrealistic Bohm trajectories’,” Z. Naturforsch. A 46, 1263–1264 (1993); M. O. Scully, “Do Bohm trajectories always provide a trustworthy physical picture of particle motion?,” Phys. Scr. T76, 41–46 (1998).

22 A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, T. Kawasaki, and Ezawa, “Demonstration of single-electron buildup of an interference pattern,”' Am. J. Phys. 57, 117–120 (1989).
23 F. Shimizu, K. Shimizu, and H. Takuma, “Double-slit interference with ultracold metastable neon atoms,” Phys. Rev. A 46, R17–R20 (1992).
24 C. F. Cerofolini, “On the nature of the subquantum medium,” Lett. Nuovo Cim. 29, 305–309 (1980).
25 E. Nelson, “Derivation of the Schr¨odinger equation from Newtonian mechanics,” Phys. Rev. 150, 1079–1085 (1966).
26 L. de la Pe˜na-Auerbach, “New formulation of stochastic theory and quantum mechanics,” J. Math. Phys. 10, 1620–1630 (1969); L. de la Pe˜na-Auerbach, “Stochastic theory of quantum mechanics for particles with spin,” J. Math. Phys. 12, 453–461 (1971).
27 D. Bohm and J. P. Vigier, “Model of the causal interpretation of quantum theory in terms of a fluid with irregular fluctuations,” Phys. Rev. 96, 208–216 (1954).
28 A. S. Sanz and S. Miret-Art´es, “Aspects of nonlocality from a quantum trajectory perspective: A WKB approach to Bohmian mechanics,” Chem. Phys. Lett. 445, 350–354 (2007).
29 A. S. Sanz and S. Miret-Artés, “A causal look into the quantum Talbot effect,” J. Chem. Phys. 126, 234106(1–11) (2007).
30 M. V. Berry, “Quantum fractals in boxes,” J. Phys. A 29, 6617–6629 (1996).
31 A. S. Sanz, “A Bohmian approach to quantum fractals,” J. Phys. A 38, 6037–6049 (2005).
32 A. S. Sanz and S. Miret-Artés, “A trajectory-based understanding of quantum interference,” J. Phys. A 41, 435303(1–23) (2008).
33 A. S. Sanz, F. Borondo, and S. Miret-Artés, “Particle diffraction studied using quantum trajectories,” J. Phys.: Condens. Matter 14, 6109–6145 (2002).
34 A. S. Sanz and S. Miret-Art´es, “Interplay of causticity and vorticality within the complex quantum Hamilton-Jacobi formalism,” Chem. Phys. Lett. 458, 239–243 (2008).
35 C.-C. Chou, A. S. Sanz, S. Miret-Artés, and R. E. Wyatt, “Hydrodynamic view of wave-packet interference: Quantum caves,” Phys. Rev. Lett. 102, 250401(1–4) (2009); C.-C. Chou, A. S. Sanz, S. Miret-Artés, and R. E. Wyatt, “Quantum interference within the complex quantum Hamilton-Jacobi formalism,” Ann. Phys. 325, 2193-2211 (2010).
36 A. S. Sanz, F. Borondo, and S. Miret-Artés, “Quantum trajectories in atomsurface scattering with single adsorbates: The role of quantum vortices,” J. Chem. Phys. 120, 8794–8806 (2004); A. S. Sanz, F. Borondo, and S. Miret-Artés, “Role of quantum vortices in atomic scattering from single adsorbates,” Phys. Rev. B 69, 115413(1–5) (2004).
37 A. S. Sanz, X. Gi´enez, J. M. Bofill, and S. Miret-Artés, “Understanding chemical reactions within a generalized HamiltonJacobi framework,” Chem. Phys. Lett. 478, 89–96 (2009); A. S. Sanz, X. Gi´enez, J. M. Bofill, and S. Miret-Artés, “Erratum,” Chem. Phys. Lett. 488, 235–236 (2010).
38 T. L. Dimitrova and A. Weis, “The wave-particle duality of light: A demonstration experiment,” Am. J. Phys. 76, 137–142 (2008).
39 A. S. Sanz, M. Davidovi´c, M. Boˇzi´c, and S. Miret-Artés, “Understanding interference experiments with polarized light through photon trajectories,” Ann. Phys. 325, 763–784 (2010).
40 R. D. Prosser, “The interpretation of diffraction and interference in terms of energy flow,” 15, 169–180 (1976); R. D. Prosser, “Quantum theory and the nature of interference,” Int. J. Theor. Phys. 15, 181–193 (1976).
41 M. O. Scully and S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
42 M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Pergamon Press, Oxford, 2002), 7th Ed.

43 M. Davidovi´c, A. S. Sanz, D. Arsenovi´c, M. Boˇzi´c, and S. Miret-Art´es, “Electromagnetic energy flow lines as possible paths of photons,” Phys. Scr. T135, 014009(1–5) (2009).
44 M. Boˇzi´c, M. Davidovi´c, T. L. Dimitrova, S. Miret-Artés, A. S. Sanz, and A. Weis, “Generalized Arago-Fresnel laws: The EME-flow-line description,” J. Russ. Laser Res. 31, 117–128 (2010).
45 W. Ehrenberg and R. E. Siday, “The refractive index in electron optics and the principles of dynamics,” Proc. Phys. Soc. B 62, 8–21 (1949); Y. Aharonov and D. Bohm, “Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory,” Phys. Rev. 115, 485–491 (1959); Y. Aharonov and D. Bohm, “Further considerations on electromagnetic potentials in the quantum theory,” Phys. Rev. 123, 1511–1524 (1961).
46 B. D. Josephson, “The discovery of tunnelling supercurrents,” Rev. Mod. Phys. 46, 251–254 (1974).