Квантовое моделирование уравнения Дирака

Р. Герритсма и др. (Австрия, Испания)

Реферат подготовил М.Х. Шульман (shulman@dol.ru)

---

arXiv:0909.0674v1 [quant-ph] 3 Sep 2009

Quantum simulation of the Dirac equation

R. Gerritsma[1,2], G. Kirchmair[1,2], F. Z?ahringer[1,2], E. Solano[3,4], R. Blatt[1,2], and C. F. Roos[1,2] (christian.roos@uibk.ac.at)

[1] Institut fur Quantenoptik und Quanteninformation, Osterreichische Akademie der Wissenschaften, Otto-Hittmair-Platz 1, A-6020 Innsbruck, Austria
[2] Institut fur Experimentalphysik, Universitat Innsbruck, Technikerstr. 25, A-6020 Innsbruck, Austria
[3] Departamento de Quimica Fisica, Universidad del Pais Vasco - Euskal Herriko Unibertsitatea, Apartado 644, 48080 Bilbao, Spain
[4] IKERBASQUE, Basque Foundation for Science, Alameda Urquijo 36, 48011 Bilbao, Spain

(Dated: September 3, 2009)

Уравнение Дирака – краеугольный камень в истории физики [1] – успешно объединяет квантовую механику со специальной теорией относительности, позволяет описать спин электрона, а также предсказывает существование антиматерии [2]. Далее, оно способно точно описать спектр атома водорода, и, фактически, релятивистская квантовая механика служит естественным шагом для перехода к квантовой теории поля. Однако уравнение Дирака также предсказывает некоторые специальные эффекты, такие как парадокс Клейна [3] и Zitterbewegung (“дрожание” электрона) – неожиданное быстрое колебательное движение свободной релятивистской квантовой частицы, впервые изучавшееся Шрёдингером [4]. Эти и другие предсказания сложно наблюдать для реальных частиц, хотя они являются ключевыми примерами для понимания релятивистских квантовых эффектов.

За последние годы интерес к моделированию релятивистских квантовых эффектов в различных физических экспериментах усилился [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12], там возможности тонкой настройки параметров теперь обеспечивают возможность осуществления различных физических режимов. В данной статье показана принципиальная возможность квантового моделирования одномерного уравнения Дирака с использованием одиночной ионной ловушки [8], которая ведет себя как свободная релятивистская квантовая частица. Положение частицы измеряется как функция времени, эффект Zitterbewegung изучается для различных начальных суперпозиций состояний спинора с положительной и отрицательной энергиями, равно как перекрытие релятивистской и нерелятивистской динамики. Высокий уровень управления экспериментальными параметрами ионной ловушки позволяет смоделировать элегантные канонические примеры релятивистской квантовой физики.

Уравнение Дирака для частицы со спином 1/2 с массой покоя m дается выражением:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = (c\,\alpha\cdot\hat{\mathbf{p}} + \beta mc^2)\psi. \qquad (1)$$

Здесь c – скорость света, $\hat{\mathrm{p}}$ - оператор импульса, α и β – матрицы Дирака, которые обычно выражаются через матрицы Паули [1], а волновые функции ψ представляют собой 4-компонентые спиноры. Общий спинор Дирака ψ может быть разложен на части с положительной и отрицательной энергиями $E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$. Zitterbewegung понимается как эффект интерференции между этими частями спинора и не проявляется у спиноров, которым соответствует только положительная или только отрицательная энергия. Далее, эффект присутствует только тогда, когда эти части имеют существенно перекрывающиеся части в пространстве координат и импульсов, и, следовательно, данный эффект не является устойчивым и зависит от целого ряда обстоятельств [1]. Уравнение Дирака предсказывает, что для свободного электрона амплитуда должна быть порядка комптоновской длины волны $R_{ZB} \sim 10^{-12}$ м, а частота $\mathrm{f}\omega_{ZB} \sim 10^{21}$ Гц, которая до настоящего времени была недоступна. В последние годы реальность существования Zitterbewegung интенсивно обсуждался в рамках квантовой механики и квантовой теории поля [13, 14].

Квантовое моделирование основано на моделировании квантовой системы в управляемых лабораторных условиях, отвечающем той же математической модели. Таким способом можно смоделировать квантовые системы, которые не удается эффективно смоделировать на классическом компьютере [15] и которые труднодоступны для прямого эксперимента при широкой вариации управляющих параметров. Трудности наблюдения реальных квантовых релятивистских эффектов стимулировали значительный интерес к квантовому моделированию их динамики. Примерами могут служить моделирование черных дыр с помощью конденсата Бозе-Эйнштейна [5], эффекта Унру с помощью ионных ловушек [6] и эффекта Zitterbewegung для массивных фермионов в физике твердого тела [7]. Широко изучается графен в связи с уравнением Дирака [16, 17, 18].

В уравнении Дирака

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H_D\,\psi = (c\,\hat{p}\,\sigma_x + mc^2\,\sigma_z)\psi, \qquad (2)$$

имеется только одна степень свободы движения, а спинор проявляется в двух внутренних уровнях, связанных с положительным и отрицательным уровнями энергии состояния [8]. Для скорости свободной частицы Дирака мы получаем $d\hat{x}/dt = [\hat{x}, H_D]/i\hbar = c\sigma_x$ в представлении Гейзенберга. Для безмассовой частицы $[\sigma_x, H_D] = 0$ и, следовательно, σ_x является интегралом движения. Для частицы с массой $[\sigma_x, H_D] \neq 0$, и эволюция частицы описывается выражением

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(0) + \hat{p}c^2 H_D^{-1} t + i\,\hat{\xi}(e^{2iH_D t/\hbar} - 1), \qquad (3)$$

где $\hat{\xi} = \frac{1}{2}\hbar c(\sigma_x - \hat{p}cH_D^{-1})\,H_D^{-1}$. Первые два члена описывают эволюцию, линейную во времени, что и ожидалось для свободной частицы, в то время как последний осциллирующий член может обусловить эффект Zitterbewegung.

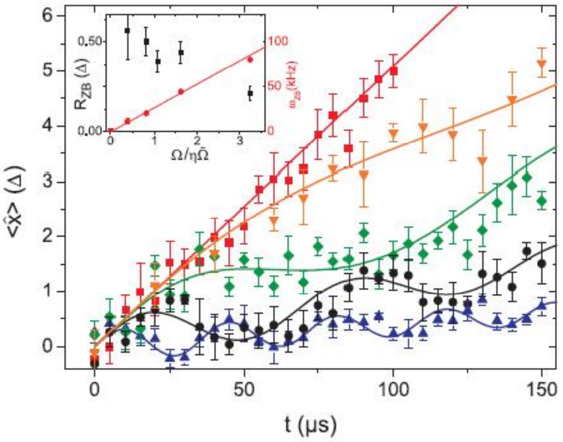

Рисунок 1: Математические ожидания $\langle\hat{x}(t)\rangle$ для частиц с различными массами. Линейная зависимость (■) соответствует безмассовой частице. Остальные зависимости соответствуют частицам с возрастающей (по мере удаления от линейной зависимости) массой.

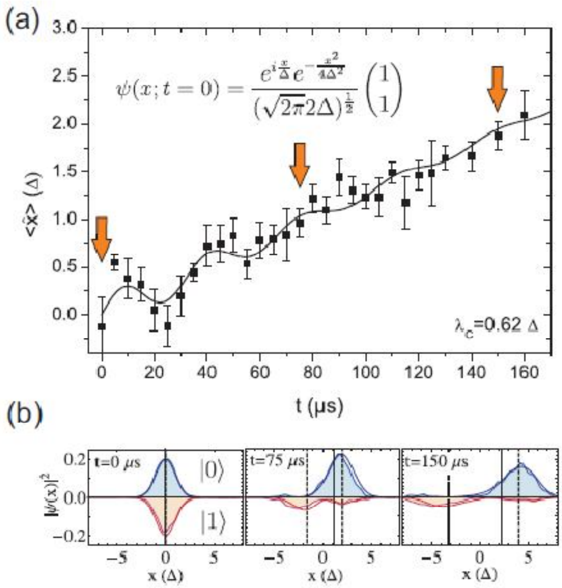

Рисунок 2: Zitterbewegung для состояния с ненулевым средним импульсом.

(a) Изначально Zitterbewegung появляется вследствие интерференции частей состояния с положительной и отрицательной энергией. Когда эти части разделены, осциллирующее движение исчезает. Сплошная кривая представляет результаты числового моделирования.

(b) Измеренные (области с заливкой) и вычисленные (сплошные линии) распределений вероятности $|\psi(x)|^2$ в моменты t = 0, 75 и 150 ?s (как показывают стрелки на диаграмме (a)). Распределение вероятностей отвечающее состоянию $|1\rangle$ показано опрокинутым. Сплошная вертикальная линия представляет величину $\langle\hat{x}\rangle$, изображенную на (a). Две пунктирные линии соответствуют математическим ожиданиям для частей спинора с положительной и отрицательной энергией. Зона погрешности составляет 1σ.

Мы исследовали динамику частицы в области, плавно переходящей от релятивистского случая к нерелятивистскому. Данные, приведенные на рис. 1, сглаживались функцией вида $\langle\hat{x}(t)\rangle = at + R_{ZB}\sin\omega_{ZB}t.$ Сглаженная амплитуда R_{ZB} и частота ω_{ZB} эффекта Zitterbewegung показаны на врезке на рис. 1. Из этих данных можно видеть, что частота растет линейно с увеличением массы

$\omega_{ZB} \approx 2\Omega$, в то время как амплитуда уменьшается по мере роста массы. Поскольку масса частиц частицы увеличивается, тогда как импульс и моделируемая скорость остаются постоянными, данные на рис. 1 показывают переход от релятивистского к нерелятивистскому пределу. Следовательно, данные подтверждают, что в обоих предельных случаях эффект Zitterbewegung исчезает, как и предсказывается теорией. В глубоко релятивистском случае это происходит потому, что ω_{ZB} стремится к нулю, а в нерелятивистском пределе – из-за исчезновения R_{ZB}.

Ссылки

[1] Thaller, B. The Dirac equation (Springer-Verlag, 1992).
[2] Anderson, C. D. The positive electron. Phys. Rev. 43, 491 – 494 (1933).
[3] Klein, O. Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac. Z. Phys. 53, 157–165 (1929).
[4] Schrodinger, E. Uber die kraftefreie Bewegung in der relativistischen Quantenmechanik. Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. 24, 418–428 (1930).
[5] Garay, L. J., Anglin, J. R., Cirac, J. I. & Zoller, P. Sonic analog of gravitational black holes in Bose-Einstein condensates. Phys. Rev. Lett. 85, 4643 (2000).
[6] Alsing, P. M., Dowling, J. P. & Milburn, G. J. Ion trap simulations of quantum fields in an expanding universe. Phys. Rev. Lett. 94, 220401 (2005).
[7] Schliemann, J., Loss, D. & Westervelt, R. M. Zitterbewegung of electronic wave packets in III-V zinc-blende semiconductor quantum wells. Phys. Rev. Lett. 94, 206801 (2005).
[8] Lamata, L., Le?on, J., Sch?atz, T. & Solano, E. Dirac equation and quantum relativistic effects in a single trapped ion. Phys. Rev. Lett. 98, 253005 (2007).
[9] Bermudez, A., Martin-Delgado, M. A. & Solano, E. Exact mapping of the 2+1 Dirac oscillator onto the Jaynes-Cummings model: ion-trap experimental proposal. Phys. Rev. A 76, 041801(R) (2007).
[10] Zhang, X. Observing Zitterbewegung for photons near the Dirac point of a two-dimensional photonic crystal. Phys. Rev. Lett. 100, 113903 (2008).
[11] Vaishnav, J. Y. & Clark, C. W. Observing Zitterbewegung with ultracold atoms. Phys. Rev. Lett. 100, 153002 (2008).
[12] Otterbach, J., Unanyan, R. G. & Fleischhauer, M. Confining stationary light: Dirac dynamics and Klein tunneling. Phys. Rev. Lett. 102, 063602 (2009).
[13] Krekora, P., Su, Q. & Grobe, R. Relativistic electron localization and the lack of Zitterbewegung. Phys. Rev. Lett. 93, 043004 (2004).
[14] Wang, Z.-Y. & Xiong, C.-D. Zitterbewegung by quantum field-theory considerations. Phys. Rev. A 77, 045402 (2008).
[15] Feynman, R. Simulating physics with computers. Int. J. Theoret. Phys. 21, 467 (1982).
[16] Cserti, J. & D?avid, G. Unified description of Zitterbewegung for spintronic, graphene, and superconducting systems. Phys. Rev. B 74, 172305 (2006).
[17] Katsnelson, M. I., Novoselov, K. S. & Geim, A. K. Chiral tunnelling and the Klein paradox in graphene. Nat. Phys. 2, 620 (2006).
[18] Neto, A. H. C., Guinea, F., Peres, N. M. R., Novoselov, K. S. & Geim, A. K. The electronic properties of graphene. Rev. Mod. Phys. 81, 109 (2009).
[19] Leibfried, D. et al. Trapped-ion quantum simulator: experimental application to nonlinear interferometers. Phys. Rev. Lett. 89, 247901 (2002).
[20] Porras, D. & Cirac, J. I. Effective quantum spin systems with trapped ions. Phys. Rev. Lett. 92, 207901 (2004).

[21] Johanning, M., Var?on, A. F. & Wunderlich, C. Quantum simulations with cold trapped ions. J. Phys. B 42, 154009 (2009).
[22] Friedenauer, H., Schmitz, H., Glueckert, J., Porras, D. & Schaetz, T. Simulating a quantum magnet with trapped ions. Nat. Phys. 4, 757–761 (2008).
[23] Kirchmair, G. et al. Deterministic entanglement of ions in thermal states of motion. New J. Phys. 11, 023002 (2009).
[24] Lougovski, P., Walther, H. & Solano, E. Instantaneous measurement of field quadrature moments and entanglement. Eur. Phys. J. D 38, 423–426 (2006).
[25] Santos, M. F., Giedke, G. & Solano, E. Noise-free measurement of harmonic oscillators with instantaneous interactions. Phys. Rev. Lett. 98, 020401 (2007).
[26] Thaller, B. Visualizing the kinematics of relativistic wave packets. arXiv:quant-ph/0409079 (2004).
[27] Aspuru-Guzik, A., Dutoi, A. D., Love, P. J. & Head-Gordon, M. Simulated quantum computation of molecular energies. Science 309, 1704–1707 (2005).
[28] Rozmej, P. & Arvieu, R. The Dirac oscillator: a relativistic version of the Jaynes-Cummings model. J. Phys. A 32, 5367–5382 (1999).
[29] Bermudez, A., Martin-Delgado, M. A. & Solano, E. Dirac cat states in relativistic Landau levels. Phys. Rev. Lett. 99, 123602 (2007).
[30] Zhang, X. & Liu, Z. Extremal transmission and beating effect of acoustic waves in two-dimensional sonic crystals. Phys. Rev. Lett. 101, 264303 (2008).