© М.Х. Шульман, 2014
(shulman@dol.ru, www.timeorigin21.narod.ru)

О природе волновой функции

(31.03.2014)

Ансамбль классических макрочастиц в статистической механике описывается плотностью ρ (вероятности) частиц, удовлетворяющих уравнению непрерывности Лиувилля. При переходе к описанию единичных квантовых микрочастиц для учета их *волновых* свойств плотность массы/энергии (по предложению Бома) представляется через комплекснозначную волновую функцию $\Psi(\vec{r},t)=\sqrt{\rho(\vec{r},t)}\cdot\exp[iS(\vec{r},t)/\hbar]$. Для фотонов, не обладающих массой, тот же подход применим на основе понятия *энергии* фотона, которая является хорошо определенной функцией *обобщенных* координат – так называемых *квадратур* электрического поля. При этом период волн, связанных с массивными элементарными частицами, составляет порядка 10^{20} Гц, тогда как фотонам соответствуют более низкие частоты электромагнитного излучения.

1 Уравнение Шрёдингера и вероятностная интерпретация Борна

Как хорошо известно, в 1926 году Эрвин Шрёдингер сформулировал дифференциальное уравнение для так называемой волновой функции Ψ, описывающей квантовомеханическую систему. Первоначально

> “он интерпретировал $\Psi\Psi^*$ как весовую функцию в конфигурационном пространстве, которая задает электродинамические флуктуации пространственной плотности электрических зарядов…, и заключил, … что не нужно и не следует искать для самой Ψ-функции в общем случае прямой интерпретации в трехмерном пространстве” **[Jammer, 1967]**.

Чуть позже (летом 1926 года) появилась знаменитая вероятностная интерпретация Макса Борна, принесшая ему (в 1954 г.) Нобелевскую премию. Согласно ей, законы природы определяют не появление события, а вероятность его появления. При этом Борн приписал интегралу от квадрата модуля волновой функции смысл числа частиц, а квадрату модуля каждого коэффициента в разложении волновой функции – смысл статистической частоты появления состояния, характеризуемого соответствующим членом разложения.

2 Гидродинамический подход Маделунга и интепретация де Бройля – Бома

В том же 1926 году Маделунг увидел (см. **[Jammer, 1967]**), что из уравнения Шрёдингера, зависящего от времени, вытекает уравнение, имеющее форму гидродинамического уравнения непрерывности, в котором фигурируют *плотность* и *потенциал скоростей* движущейся жидкости. Развивая эти идеи, Маделунг показал, что каждая собственная функция (решение волнового уравнения) хотя и зависит от времени, но может интерпретироваться как некоторый тип стационарного течения. Поскольку гидродинамическая модель описывала также и другие важные черты теории Шрёдингера, Маделунг предположил, что существует возможность рассматривать квантовую теорию атомов с этой точки зрения.

"Гидродинамическая модель квантовой механики может рассматриваться в качестве предшественника механики Бома. … Мышление, подобное механике Бома, в рамках квантовой гидродинамики амплитуд дает плотность вероятности ρ и поток плотности вероятности $\vec{J}=\rho\vec{v}$, которые связаны между собой уравнением непрерывности." **[Sanz and Miret-Artés, 2011]**

В 1952 г. Дэвид Бом, развивая идеи Луи де Бройля о волне – пилоте, управляющей движением материальной частицы, опубликовал две связанные общей концепцией статьи **[Bohm, 1952]**. Бом предложил перейти от уравнения Шрёдингера для *комплекснозначной* волновой функции к системе двух уравнений для двух действительных величин – *модуля* и фазы волновой функции. При этом он, в свою очередь, утверждал, что фазу следует рассматривать как "скрытый параметр" в смысле фон Неймана, и что знание значения этого параметра (во всяком случае, принципиально) позволяет говорить не о вероятностной, а о *детерминистической траектории каждой отдельно взятой квантовой частицы*.

Фаза S в уравнениях Бома оказывается *нелокальным* параметром, ее динамика зависит от специфического квантового потенциала, который, в свою очередь, зависит исключительно от *неравномерности* плотности распределения в пространстве. Наличие квантового потенциала отличает квантовое описание от классического, где никакого аналога этому члену нет. Квантовый потенциал обеспечивает в общем случае так называемую запутанность между частицами, т.е. тот факт, что отдельные траектории (которые в бомовской интерпретации имеют определенный физический смысл) не независимы одна от другой и не описываются отдельными независимыми волновыми функциями. В модели Бома уравнение Шрёдингера

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V\right)\Psi$$

для волновой функции Ψ частицы с массой m, находящейся в потенциальном поле V, с помощью подстановки

$$\Psi(\vec{r},t)=\sqrt{\rho(\vec{r},t)}\cdot\exp[iS(\vec{r},t)/\hbar]$$

преобразуется в систему связанных уравнений:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\frac{\nabla S}{m}\right)=0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{(\nabla S)^2}{2m}+V+Q=0 \qquad (2)$$

где вышеупомянутый квантовый потенциал Q равен

$$Q=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2(\sqrt{\rho})}{\sqrt{\rho}}$$

С формальной точки зрения система уравнений (1) и (2) *полностью эквивалентна* уравнению Шрёдингера. Следует подчеркнуть, что уже из одного этого следует *неправомерность* утверждения Бома о том, что эта модель якобы описывает индивидуальные траектории частиц; в действительности модель Бома также описывает их *усредненные* траектории, однако теперь усреднение производится *не по всем возможным траекториям*, а только по траекториям с фиксированной функцией $S(\vec{r},t)$, т.е. по *подмножеству* траекторий[1].

Далее, уравнение (1) представляет *собой уравнение непрерывности*, описывающее гидродинамический ансамбль, т.е. движение пучка траекторий, вначале распределенного с некоторой исходной плотностью. При этом в силу использованной подстановки очевидно, что $|\rho| = \Psi\Psi^*$. Таким образом, можно утверждать, что квантовую механику можно рассматривать как статистическое описание частиц с помощью величины ρ. Но отсюда сразу напрашивается аналогия между квантовым уравнением Шрёдингера и классическим уравнением Лиувилля.

Эта аналогия в некотором смысле может быть истолкована как *единообразие* классического и квантового описания на основе распределения плотности (когда речь идет о большом количестве частиц) или плотности вероятности (когда речь идет, например, о единичной частице). Таким образом, физический смысл *квадрата модуля* волновой функция становится ясным и сводится, по существу, к величине плотности энергии (заметим, что энергия определена не только для массивных, но и для безмассовых частиц, в частности – для фотонов).

Вместе с тем, квантовое описание опирается на использование комплекснозначных величин и функций, т.е. существенно использует представление о фазе и, следовательно, о волновых свойствах частиц. Эти волновые свойства неизбежно приводят к концепции *колебательного движения, присущего квантовым объектам*. Такого рода колебательное движение может иметь совершенно разный характер для различных объектов, например, при наличии массы у квантовой частицы и в отсутствие таковой.

3 Описание массивной частицы

Движение квантовой массивной частицы (в отличие от классической) можно представить себе в виде *комбинации двух компонент*: медленной (плавной, обычной для классической физики) и быстрой, осциллирующей. Эту вторую компоненту (Zitterbewegung – “дрожащее движение”) частицы (например, электрона), подчиняющейся релятивистскому уравнению Дирака, теоретически обнаружил Шрёдингер в 1930 г. Частота осцилляции (~ 10^{20} Гц) соответствует массе покоя частицы, т.е. равна $mc^2/\hbar$. Фаза осцилляции, как и в модели Бома, может рассматриваться в качестве скрытого нелокального параметра.

Тот факт, что частота осцилляции непосредственно выражается через массу, т.е. косвенно – через плотность энергии ρc^2, сразу подтверждает допустимость тезиса о физическом смысле *квадрата модуля* волновой функции.

---

[1] Эти подмножества траекторий, для которых точно известны как начальные, так и конечные состояния, соответствуют концепции т.н. *слабого* измерения на основе пре- и пост-селекции траекторий.

4 Описание фотонов

Более низкий (менее 10^{20} Гц) частотный диапазон характерен для фотонов, где медленная (классическая) компонента движения *отсутствует*, а понятие пространственной локализации фотона плохо определено (если вообще определено). Массой фотон, как известно, также не обладает. В то же время понятие *энергии ансамбля фотонов* является вполне определенным и с успехом может быть использовано при интерпретации его волновой функции (см. **[Sanz and Miret-Artés, 2011]**).

В самом деле, электромагнитное поле может быть представлено ансамблем независимых *осцилляторов*. Электрическое поле каждого осциллятора, в свою очередь, может быть формально представлено *комплексной* гармоникой

$$a(x,t) = a_0 \exp[i(kx - \omega t)]$$

с частотой ω и волновым вектором k, где $k^2 = \omega^2 / c^2$ (здесь c обозначает скорость света). Можно ввести две новые *действительные* переменные (в квантовой оптике их называют *квадратурами*):

$$q = \frac{a^* + a}{2} = a_0 \cos(kx - \omega t), \qquad p = i\frac{a^* - a}{2} = a_0 \sin(kx - \omega t).$$

которые представляют собой, соответственно, *обобщенные* координату и импульс такого электромагнитного осциллятора (заметим, что они связаны не с механическим движением, а с параметрами электрического поля, которые зависят от координаты x). Энергия H такого осциллятора равна

$$H = \frac{q^2}{2} + \frac{p^2}{2}$$

Но вероятность распределения по квадратурам q и p относительно средних значений q_0 и p_0 для *когерентного* светового пучка определяется выражением (функцией Вигнера)

$$W(q,p) = \frac{1}{\pi}\exp\left[-\frac{(q-q_0)^2}{2} - \frac{(p-p_0)^2}{2}\right]$$

т.е. соответствует больцмановскому экспоненциальному распределению по энергиям.

В заключение отметим следующее. Фотон, представляя собой электромагнитный *осциллятор*, обладает как *потенциальной* энергией, пропорциональной $(q-q_0)^2/2$, так и *кинетической*, пропорциональной $(p-p_0)^2/2$. Сумма этих двух компонент энергии всегда постоянна и равна $\omega\hbar$, но каждая из них *меняется во времени по гармоническому* закону.

С моей точки зрения, это обстоятельство незаслуженно игнорируется в современной научной парадигме, хотя оно является ключевым при объяснении волновых аспектов поведения фотона. В частности, регистрацию фотонов с помощью традиционных детекторов следует связывать *только* с величиной *кинетической* компоненты их энергии в момент регистрации, зависящей от *случайной* фазы, что прекрасно (с учетом нелокальности) объясняет проявление волновых свойств фотона (это относится к закону Малюса, ЭПР-экспериментам и т.д.). Этим же фактором можно объяснить *кажущееся отсутствие* фотонов на одном из детекторов в известных опытах по так называемым измерениям без взаимодействий (interaction-free measurements), впервые описанных в **[Elitzur and Vaidman,1993]**.

Ссылки

[Bohm, 1952] D. Bohm, A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables. I, Phys. Rev. 85, 166-179(1952); A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables. II, Phys. Rev. 85, 180-193 (1952).

[Elitzur and Vaidman, 1993] A.C. Elitzur and L. Vaidman. Quantum mechanical interaction-free measurements. Found. Phys. **23**(7), 987-997 (1993).

[Jammer, 1967] Max Jammer. The conceptual development of quantum mechanics. McGraw-Hill book Company. New York, St. Louis. San Francisco, Toronto, London, Sydney 1967. Русский перевод: Макс Джеммер. Эволюция понятий квантовой механики. Москва, "Наука", 1985.

[Sanz and Miret-Artés, 2011] A. S. Sanz and S. Miret-Artés. Analyzing the quantum phase with quantum trajectories: A step towards the creation of a Bohmian thinking. ArXiv:1104.1296v1 [quant-ph] 7 Apr 2011.

Русский перевод: А. Санц и С. Мире-Артес. Анализ квантовой фазы для квантовых траекторий. Шаг к рождению бомовского мышления.
http://www.timeorigin21.narod.ru/rus_translation/1104_1296v1_Phase_and_trajectory.pdf