© М.Х. Шульман, 2014
(www.timeorigin21.narod.ru, shulman@dol.ru)

О соотношении неопределенностей

(18.03.2014. Исправлено 10.04.2014)

Рассмотрены три подхода к соотношению неопределенности Гейзенберга: подход копенгагенской школы, подход в рамках интерпретации де Бройля – Бома и подход в рамках модели частицы в виде осциллятора.

1 Копенгагенская интерпретация

Соотношение неопределенностей является краеугольным камнем квантовой механики. Вначале его доказательство опубликовал В. Гейзенберг, который исходил (см. **[Jammer, 1967]**) из упрощенных представлений: он предположил, что координата частицы q распределена вокруг своего среднего значения согласно гауссовой кривой ошибок. Тогда и импульс частицы p оказывается распределенным вокруг своего среднего значения согласно гауссовой кривой ошибок; при этом произведение неопределенностей δqδp равно ħ/2, т.е. чем точнее определено положение, тем менее точно известен импульс, и наоборот. В этом Гейзенберг и видел прямую наглядную интерпретацию основного коммутационного соотношения pq – qp = ħ/2i.

В дальнейшем Робертсон показал (см. **[Jammer, 1967]**), что принцип неопределенности можно общим образом сформулировать для любых двух некоммутирующих эрмитовых операторов, коммутатор которых равен iħ, если при этом использовать волновую функцию рассматриваемого состояния. Он доказал, что для заданной нормированной функции и двух указанных эрмитовых операторов A и B можно установить неравенство вида ΔAΔB ≥ ħ/2.

На это доказательство ссылается в своей знаменитой монографии **[фон Нейман, 1932]** Джон фон Нейман. Он подразумевал, что речь идет об операторах специфических квантовых наблюдаемых, которые принципиально характеризуются неустранимой погрешностью измерения[1]. При этом он настаивал на том, что именно влияние измерения на его результат (редукция волновой функции при измерении) делает квантовую теорию чисто статистической и акаузальной, вносит ненулевую дисперсию в распределение квантовомеханических величин в ансамбле, исключая тем самым возможность восстановления детерминизма с помощью каких бы то ни было “скрытых” параметров. Заметим, что фон Нейман специально отмечает чисто мнимый характер коммутатора двух произвольных эрмитовых операторов.

С другой стороны, еще сам Гейзенберг исследовал физические корни своего знаменитого принципа, также апеллируя к тому, что сам по себе факт измерения искажает “истинную” ситуацию; чем точнее измеряется, например, координата, тем большее искажение вносится измерительным устройством в “истинное” значение импульса. В учебнике **[Feynman et al., 1963]** принцип неопределенности интерпретируется, исходя из представлений о волновом пакете, вероятность обнаружить который отлична от нуля лишь в определенной области Δq. Неопределенность импульса такого пакета здесь связывается с тем, что импульс обратно пропорционален длине волны, а для короткого пакета (цуга) волн, который является *суммой* нескольких *различных* гармонических колебаний,

[1] В разделе 3 показано, как соотношение неопределенностей можно интерпретировать с детерминистической точки зрения, имея в виду усреднение по очень малому периоду колебаний.

нельзя однозначно определить длину волны, т.е. оценка для длины волны оказывается заключенной в некотором диапазоне значений.

2 Интерпретация де Бройля – Бома и слабые измерения

В 1952 году Дэвид Бом выдвинул тезис (**[Bohm, 1952]**), согласно которому статистическая гипотеза фон Неймана неверна, и существует “скрытый параметр”[2] – фаза волновой функции, которая хотя бы с принципиальной точки зрения позволяет говорить об индивидуальной траектории и скорости квантовой частицы. Согласно мнению Бома можно, по крайней мере, расчетным путем, одновременно и с произвольной точностью определить значения ее координаты и импульса.

В 1988 году Я. Ааронов, Д. Альберт и Л. Вайдман предложили концепцию так называемых “слабых (weak)” квантовых измерений. Пусть, в соответствии с неравенством Гейзенберга, один из двух параметров измеряется очень “грубо”. Это можно “поправить”, если обеспечить *многократное* измерение (при заданных начальных и финальных условиях) этого параметра, а затем *усреднить* полученные значения, при этом погрешность уменьшится пропорционально квадратному корню из числа измерений. Тогда можно преодолеть теоретический предел точности измерений, налагаемый соотношением Гейзенберга, что и было выполнено экспериментально в ряде недавних экспериментов (см. **[Dixon et al., 2009]**, **[Jeff et al., 2011]**, **[Hosten and Kwiat, 2008]**, **[Kocsis et al., 2011]** **[Popescu, 2009]**).

Хотя поток публикаций сторонников интерпретации де Бройля – Бома и концепции “слабых” измерений непрерывно растет, можно ли говорить о том, что соотношение Гейзенберга и статистическая интерпретация квантовой механики “устарели”? С моей точки зрения это не так. Дело в том, что в обоих упомянутых случаях речь идет об усреднении индивидуальных историй эволюции частицы. Если для “слабых” измерений это справедливо по определению, то применительно к интерпретации де Бройля – Бома это можно увидеть из формальной аналогии его подхода с методами теории “вероятностной” жидкости:

> “Рассмотрим (классическую) сплошную среду. Она состоит из многих различных частиц (атомов, ионов, молекул и т.д.), все степени свободы описываются набором связанных дифференциальных уравнений, причем число уравнений совпадает с числом степеней свободы. Пусть нас интересует не микроскопическое описание среды, а лишь макроскопическое описание с помощью уравнения типа уравнения Эйлера или Навье - Стокса, которое феноменологически описывает эволюцию сплошной среды, не уделяя внимания микроскопической динамике ее составляющих. Именно на этом построены основы гидродинамики. … Реальные отдельные квантовые частицы ведут себя как корпускулы, хотя их распределение обнаруживает волновые свойства согласно уравнению Шрёдингера или его бомовским эквивалентам. Следовательно, очевидно, что свойства ансамбля требуется описывать коллективно, т.е. функцией плотности распределения, роль которой выполняет плотность вероятности в квантовой механике или, на более элементарном уровне, волновая функция. Это соответствует *статистической интерпретации Борна* для квантовой механики. … если уравнения Бома понимаются как уравнения гидродинамики, то траектории, полученные из уравнений, не обязательно могут (должны) рассматриваться

[2] Позже Джон Белл показал, что это не противоречит рассуждениям фон Неймана, если “скрытый параметр” является нелокальным.

как траектории реальных частиц, но скорее как *линии потока, ассоциированного с квантовой жидкостью*. ” **[Sanz and Miret-Artés, 2011]**.

См. также публикацию **[Sanz, 2012]**, где эти линии потока аргументированно отождествляются с линиями переноса энергии/массы (которые не пересекаются в фазовом пространстве и образуют “вероятностные трубки” с непересекающимися границами), но не с траекториями отдельных частиц. Таким образом, модель Бома, математически эквивалентная “диффузионному” по своей структуре формализму уравнения Шрёдингера, не может описывать и не описывает хаотическое (броуновское) движение каждой отдельно взятой частицы, а дает лишь усредненное (коллективное) описание движения.

3 Соотношение неопределенностей и модель частицы в виде элементарного осциллятора

Понятие “квантовая частица” в современной физике явно или неявно ассоциируется с ее образом в виде материальной точки, которая могла бы характеризоваться *действительными* значениями координаты и импульса. Однако фактически эту концепцию разрушил непосредственно сам основатель квантовой механики В. Гейзенберг, который начал (см. **[Jammer, 1967]**) с того, что представил координату и импульс квантовой частицы в виде бесконечного ряда комплекснозначных гармоник. Он также наложил определенные ограничения на правила умножения (совпавшие, как выяснилось, с таковыми для матриц) этих величин, откуда и было выведено все последующее. Можно ли подобрать понятную физическую интерпретацию для такой математической схемы построения основ теории, основанную на идеях классической физики?

В своей книге **[Шульман, 2004]** я предложил при описании атомных и субатомных объектов рассматривать в качестве “первичного кирпичика” модели не материальную точку, а (комплекснозначный) осциллятор или набор осцилляторов. С математической точки зрения это в точности отвечает подходу Гейзенберга. С физической точки зрения это проливает яркий свет на причину усложнения представлений о координате и траектории частицы, о коммутации физических величин и возможности одновременного их измерения, о “собственном” моменте вращения частицы, о двух классах частиц (фермионы и бозоны).

При таком описании движение частицы можно представить себе в виде комбинации двух компонент: медленной (плавной, обычной для классической физики) и быстрой, осциллирующей. Эту вторую компоненту (Zitterbewegung – “дрожащее движение”) частицы (например, электрона), подчиняющейся релятивистскому уравнению Дирака, теоретически обнаружил Шрёдингер в 1930 г. Частота осцилляции соответствует переходам от частицы к античастице и имеет порядок $2mc^2/\hbar \approx 10^{20}$ Гц. Фаза осцилляции, как и в модели Бома, может рассматриваться в качестве скрытого нелокального параметра. При измерениях квантовая погрешность связана именно с этой осцилляцией.

Возвращаясь к модели осциллятора как таковой, будем оперировать с двумя гармонически изменяющимися величинами – координатой $q(t)=q_0\sin\,\omega t$ и импульсом $p_0\sin\,(\omega t+\varphi)$, между которыми существует фазовый сдвиг φ (при этом обычно фаза координаты принимается равной нулю при $t = 0$). Именно величина этого фазового сдвига определяет основные свойства осциллятора.

Введем мгновенное действие:

$$s(t)=q(t)p(t)=q_0\sin\,\omega t \cdot p_0\sin\,(\omega t+\varphi)]$$

Это произведение можно преобразовать в сумму двух компонент

$$s(t)=q(t)p(t)=(q_0p_0)\,[\cos\varphi\,(\sin\omega t\,\sin\omega t)+\sin\varphi\,(\sin\omega t\,\cos\omega t)]$$

Первое слагаемое в квадратных скобках, пропорциональное cos φ, представляет собой так называемую *активную* компоненту, в ней отсутствует фазовый сдвиг между множителями в круглых скобках. *Активная* компонента описывает энергию, *необратимо* рассеиваемую осциллятором в течение периода (запасенную ранее или черпаемую из внешнего источника). Если мы усредним (с помощью прямого интегрирования) активную компоненту энергии за период, то найдем, что

$$S_a=(q_0p_0)\cos\varphi$$

Второе слагаемое в квадратных скобках, пропорциональное sin φ, представляет собой так называемую *реактивную* компоненту, в ней фазовый сдвиг между множителями в круглых скобках с точностью до знака равен $\pi/2$. Оно описывает чисто колебательную энергию осциллятора за период, среднее значение которой равно нулю.

Если угол φ равен нулю, то потребляется (теряется осциллятором) вся энергия, получаемая от внешнего источника; если же этот угол равен $\pi/2$, то *вся* энергия, циркулирующая в осцилляторе, оказывается *реактивной*, т.е. чисто колебательной.

Прямым вычислением нетрудно показать, что *суммарная* дисперсия двух компонент относительно среднего значения S_a равна

$$D=(q_0p_0)^2\,(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)/8=(q_0p_0)^2/8$$

или, переходя от амплитудных значений q_0 и p_0 к среднеквадратическим (эффективным) q_{eff} и p_{eff}, получим результат Гейзенберга:

$$D=(q_{eff}p_{eff})^2/4$$

где необходимо, разумеется, заменить классическое действие $(q_{eff}p_{eff})$ на универсальную квантовую постоянную ħ.

Благодарность

Я выражаю благодарность А.В. Белинскому за конструктивную критику и плодотворное обсуждение данной публикации, что привело к ее существенной переработке.

Ссылки

[Aharonov et al., 1988] Y. Aharonov et al. How the Result of a Measurement of a Component of the Spin-1/2 Particle Can Turn Out to be 100. Physical Review Letters, Vol. 60, Numb. 14. Русский перевод: Я. Ааронов, Д. Альберт и Л. Вайдман. Как результат измерения компоненты спина у частицы со спином 1/2 может дать значение спина, равное 1000.
http://www.timeorigin21.narod.ru/rus_translation/Aharonov_weak_meas.pdf

[Bohm, 1952] D. Bohm, A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables. I, Phys. Rev. 85, 166-179(1952); A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables. II, Phys. Rev. 85, 180-193 (1952).

[Dixon et al., 2009] P. B. Dixon, D. J. Starling, A. N. Jordan, and J. C. Howell, Phys. Rev. Lett. 102, 173601 (2009).

[Jeff et al., 2011] Jeff S. Lundeen, Brandon Sutherland, Aabid Patel, Corey Stewart, and Charles Bamber. Direct Measurement of the Quantum Wavefunction. arXiv:1112.3575v1. См. также реферат на русском языке http://www.timeorigin21.narod.ru/rus_translation/1112_3575v1_Wave_func_measurment_ref.pdf].

[Jammer, 1967] Max Jammer. The conceptual development of quantum mechanics. McGraw-Hill book Company. New York, St. Louis. San Francisco, Toronto, London, Sydney 1967. Русский перевод: Макс Джеммер. Эволюция понятий квантовой механики. Москва, "Наука", 1985.

[Feynman et al., 1963] Feynman R., Leighton R., Sands M. The Feynman lectures on physics. Addison wesley publishing company, inc., 1963. (Рус. пер.: Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Москва, Мир, 1978)

[Hosten and Kwiat, 2008] O. Hosten and P. Kwiat, Science 319, 787 (2008)

[Kocsis et al., 2011] Sacha Kocsis, Boris Braverman, Sylvain Ravets, Martin J. Stevens, Richard P. Mirin, Krister Shalm, Aephraim M. Steinberg. Observing the Average Trajectories of Single Photons in a Two-Slit Interferometer. Science 332, 1170 (2011). http://materias.df.uba.ar/labo5Aa2012c2/files/2012/10/Weak-measurement.pdf См. также реферат на русском языке http://www.timeorigin21.narod.ru/rus_translation/Kocsis_Trajectories.pdf.

[Neumann, 1932] v. Neumann J. Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin, Verlag von Julius Springer, 1932. (Рус. пер.: фон Нейнман И. Математические основы квантовой механики. Москва, Наука, 1964).

[Popescu, 2009] Sandu Popescu. “Weak measurements just got stronger”. Physics 2, 32 (2009), http://link.aps.org/doi/10.1103/Physics.2.32]. См. также реферат на русском языке http://www.timeorigin21.narod.ru/rus_translation/Popescu_weak_meas.pdf.

[Sanz and Miret-Artés, 2011] A. S. Sanz and S. Miret-Artés. Analyzing the quantum phase with quantum trajectories: A step towards the creation of a Bohmian thinking. ArXiv:1104.1296v1 [quant-ph] 7 Apr 2011.
Русский перевод: А. Санц и С. Мире-Артес. Анализ квантовой фазы для квантовых траекторий. Шаг к рождению бомовского мышления.

[Sanz, 2012] Ángel S. Sanz. Quantumness beyond quantum mechanics. ArXiv:1202.5181v1 [quant-ph] 23 Feb 2012.
Русский перевод: Анхел Санц. Кванты за пределами квантовой механики. http://www.timeorigin21.narod.ru/rus_translation/1202_5181_Beyond_QM.pdf

[Шульман, 2004] Шульман М.Х. Вариации на темы квантовой теории. Москва, Едиториал УРСС, 2004. Доступно по ссылке: http://timeorigin21.narod.ru/rus_quantum/Variations.pdf