

## Обсуждение парадигмы Леггетта – Гарга

(© 04.05.2016)

В работе обсуждается вопрос о тестировании состояния суперпозиции одиночной квантовой частицы до измерения. На примере известного двухщелевого эксперимента формулируется общее правило вычисления вероятности для коррелированных альтернатив через *корреляционный момент* (в Приложении демонстрируется применение этого правила для состояния суперпозиции системы, не связанной с квантовой механикой). Исходя из этого правила утверждается, что для проявления т.наз. “коллективного” поведения квантовых частиц нет необходимости вводить представление об их запутанности во времени. Обсуждаются теоретическая модель и экспериментальные результаты, связанные с темпоральным неравенством Леггетта – Гарга; делается вывод о том, что для установления факта суперпозиции не требуется проверять нарушение этого неравенства, а достаточно установить более простой факт коррелированности базисных альтернатив.

### 1. Введение

Как известно, в квантовой механике рассматриваемые системы могут находиться в состоянии суперпозиции, чего нет в классической теории. Неравенства Белла и *пространственное* неравенство Леггетта, проверенные в ходе многочисленных экспериментов (см., например, [1, 2]), показали коррелированность между собой состояний *запутанных пар частиц*.

Возникает вопрос: можно ли говорить о состоянии суперпозиции (в тех случаях, когда суперпозиция принципиально возможна) до измерения над *одиночной частицей*? Если да, то вместо пары (более или менее) одновременных измерений в разных местах пространства следует рассматривать пару измерений *над одним и тем же объектом в различные моменты времени*, выявляя наличие или отсутствие корреляций между результатами измерений. Более того, в развитие этой темы уместно спросить: возможно ли говорить о запутанности состояний во времени?

### 2. Описание двухщелевого эксперимента

Первое, что приходит в голову – это знаменитый двухщелевой эксперимент с одиночными частицами (электронами или фотонами), который (на уровне научного шедевра) описал Ричард Фейнман в своем знаменитом курсе лекций по физике [3].

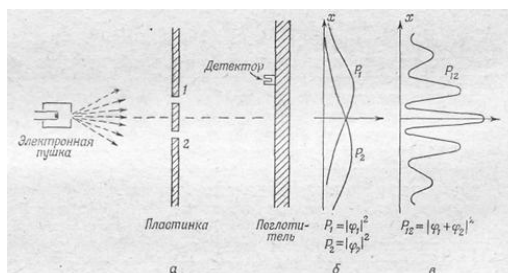


Рисунок 1. Схема двухщелевого эксперимента [3]

Если установлен контроль за тем, по какому пути (which way) пролетел электрон, то мы получаем распределение интенсивности следов попадания электронов на экран, показанное на диаграмме (б); это чисто механическая сумма ситуаций, при которой та или иная щель закрыта, никакой интерференции не наблюдается:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2, \quad (1a)$$

где квадрат интенсивности  $A$  суммарной волны равен сумме квадратов интенсивностей двух волновых компонент. Если же which way – контроль отсутствует, то между двумя возможными *траекториями* возникает интерференция, см диаграмму (в), как между двумя когерентными источниками классических волн:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos \Delta\phi, \quad (1b)$$

т.е. добавляется интерференционный член, в который входит угол  $\Delta\phi$  между направлениями волновых компонент на точку, в которую попал электрон. Заметим, что выражение (1b) можно представить в виде суммы двух аналогичных слагаемых:

$$A^2 = (A_1^2 + A_1 A_2 K) + (A_2^2 + A_1 A_2 K), \quad (2)$$

явным образом вводя *коэффициент корреляции между альтернативными траекториями*:

$$K = \cos \Delta\phi. \quad (3)$$

Таким образом, в отличие от случая с определенным which way, *каждый источник вносит дополнительный интерференционный вклад в суммарную интенсивность*.

Фейнман комментирует эту ситуацию следующим образом. Он пользуется понятием *комплексной амплитуды* вероятности  $a$ , которая с точностью до фазового множителя равна корню квадратному из вероятности  $P$  события в идеальном опыте, т.е.  $a^2 = |P|$ . Если событие может произойти *несколькими* взаимно исключающими опытами, то амплитуда вероятности события – это сумма амплитуд вероятностей каждого отдельного события, возникает интерференция:  $a = a_1 + a_2$  и  $P = |a_1 + a_2|^2$ . Но если ставится опыт, позволяющий узнать, какой из этих взаимно исключающих способов на самом деле осуществляется, то вероятность события – это сумма вероятностей для каждого отдельного способа, интерференция отсутствует:  $P = |a_1|^2 + |a_2|^2$ .

### 3. Абстрактный формализм для описания суперпозиции

Заметим, что эту ситуацию несложно описать математически не только для квантовой механики, но и для произвольной системы (например, социальной, технической и т.п.). Как известно из теории вероятностей [4], *суммой* двух событий  $S_1$  и  $S_2$  называется событие  $S_3$  ( $S_3 = S_1 + S_2$ ), состоящее в выполнении события  $S_1$  или события  $S_2$ , или обоих вместе, т.е. *хотя бы* одного из этих двух событий. Далее, *произведением* двух событий  $S_1$  и  $S_2$  называется событие  $S_4$  ( $S_4 = S_1 \cdot S_2$ ), состоящее в *одновременном* выполнении события  $S_1$  и события  $S_2$ , т.е. обоих этих событий.

Для диаграмм на рис.1 событие состоит в том, что наугад выбранная точка попадает в соответствующий интервал на прямой. Понятно, что сумма событий отвечает объединению, а произведение событий – пересечению двух верхних интервалов.

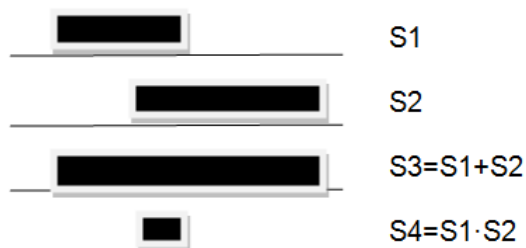


Рисунок 1. Сумма и произведение событий

Если произведение  $S3$  двух событий равно нулю (т.е. интервалы  $S1$  и  $S2$  не пересекаются), то такие два события называются *несовместными* (одно исключает другое); так, если электрон в двухщелевом опыте проходит через одну – точно известную – щель, то это исключает его прохождение через другую щель. Напротив, если щель, через которую проходит электрон, не известна (не контролируется), то его траектории образуют суперпозицию и являются *совместными* событиями – проходя через одну щель, он может проходить одновременно через вторую.

Для несовместных событий вероятность суммы двух событий равна

$$P(S1+S2)=P(S1) + P(S2). \quad (4a)$$

Если же события *совместны* (изображающая точка может попасть в непустую область  $S1 \cdot S2$ ), то вероятность суммы двух событий равна

$$P(S1+S2)=P(S1) +P(S2) – P(S1 \cdot S2). \quad (4b)$$

Считая все точки интервала равновероятными, находим, что соответствующие вероятности  $P(S)$  пропорциональны длине соответствующего интервала  $S$ . Например, если события *несовместны*, то вероятность того, что произойдет *любое* событие, будет по формуле (3) равно  $P(S1+S2)=1$ . Представим теперь (4b) в виде<sup>1</sup>

$$P(S1+S2)=P(S1) +P(S2) – 2 K_0, \quad (5)$$

где  $K_0$  – так называемый *корреляционный момент*, равный половине отношения длины интервала  $S4=S1 \cdot S2$  к длине полного интервала (т.е. к объединению интервалов)  $S3=S1+S2$ :

$$K_0 = (1/2) \cdot P(S1 \cdot S2)/[P(S1+S2)]. \quad (6)$$

Таким образом, корреляционный момент характеризует<sup>2</sup> меру относительной коррелированности двух событий (меру взаимного перекрытия события  $S1 \cdot S2$  с объединением событий  $S1$  и  $S2$ , см. рис. 1). Если события несовместны, то есть некоррелированы, то  $K_0 = 0$ ; если события полностью совпадают, т.е. 100%-коррелированы, то  $P(S1) = P(S2) = P(S1+S2) = P(S1 \cdot S2)$ ,  $K_0 = 1/2 \cdot P(S1)$ .

В Приложении приведен простой пример суперпозиции, никак не связанный с квантовой механикой.

<sup>1</sup> Полезно вспомнить, что дисперсия двух величин в общем случае выглядит аналогично:  $D(S1+S2)=D(S1)+D(S2)+2K_0$ , см. [4].

<sup>2</sup> Корреляционный момент  $K_0$ , в отличие от коэффициента корреляции  $K$ , учитывает также возможное неравенство интервалов для  $S1$  и  $S2$ , ср. с формулой (2).

#### 4. Есть ли запутанность во времени для траекторий в двухщелевом эксперименте

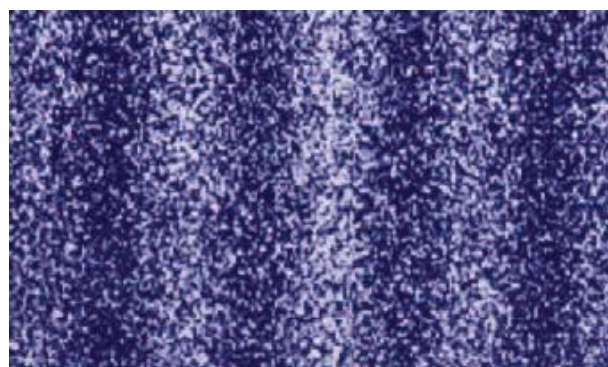
Вернемся теперь к вопросу о том, нужно ли в этом случае говорить о запутанности траекторий во времени? Например, в опытах Тономуры [5] исследовалось рассеяние пучка *одиночных* электронов в бипризме, которая по своим физическим свойствам аналогична экрану с двумя щелями. В опытах можно было постепенно накапливать и фиксировать результат прохождения определенного числа электронов (рис. 2).

По мере накопления возникает отчетливая интерференционная картина. В связи с этим возникает дилемма:

- либо мы имеем дело с коллективным поведением электронов, когда (как минимум) последующие траектории “знают” о предшествующем распределении следов на экране, так что корпускулярно-волновой дуализм имеет смысл только при коллективном описании;
- либо электрон интерферирует сам с собой (точнее, интерферируют две возможные траектории движения электрона), т.е. в каждом опыте с единичным электроном распределение вероятностей попадания электрона в соответствующую точку экрана описывается соотношением (1b), а не соотношением (1a), и корпускулярно-волновой дуализм имеет смысл уже при единичном описании.



Следы 200 электронов



Следы 140 000 электронов

Рисунок 2. Следы электронов на экране в опытах Тономуры [5]

С нашей точки зрения, нет смысла говорить о первом сценарии и описании исключительно коллектива единичных электронов, точно так же, как нет смысла говорить о “мистическом” знании отдельными членами большого физического ансамбля о значении макроскопических параметров ансамбля в целом (например, температуры газа в некотором объеме). Статистика возникает сама по себе, в силу закона больших чисел, вероятности для коррелированных альтернатив по мере увеличения численности ансамбля складываются в макроскопически наблюдаемые картины интерференции.

#### 5. Парадигма Леггетта – Гарга

В 1985 году была опубликована работа [6], в которой была поставлена проблема экспериментального различения макроскопической системы, которая может одновременно находиться в одном и только одном состоянии (“макроскопический реализм”), от квантового кубита, который может находиться в

суперпозиции базисных состояний. Авторы – Леггетт и Гарг – разумно связали последний случай с мерой коррелированности базисных состояний (в отличие от макрореалистической системы).

Леггетт и Гарг предложили схему опыта с кубитом (р/ч СКВИДом), где (после измерения) его состояние описывается переменной  $Q$ , принимающей значение  $+1$  или  $-1$ . Таких последовательных опытов, по предложению авторов, нужно провести три, при этом получим результаты  $Q_1$ ,  $Q_2$  и  $Q_3$ . Тогда, как легко показать, справедливо следующее неравенство:

$$|Q_1Q_2 + Q_2Q_3| \leq |1 + Q_1 \cdot Q_3| \quad (7)$$

После многократного измерения и усреднения возникает *темпоральное* неравенство Леггетта-Гарга, которое должно удовлетворяться, если между измерениями система находится в однозначно определенном состоянии (не в состоянии суперпозиции), т.е. выполняется гипотеза “макроскопического реализма”:

$$|k_{12} + k_{23}| \leq |1 + k_{13}| \quad (8)$$

где  $k_{12}$ ,  $k_{23}$  и  $k_{13}$  – коэффициенты корреляции между измерениями.

Проблема, однако, состоит в самом измерении значения величины  $Q$  для квантовой системы. В силу принципа неопределенности Гейзенберга измерение неизбежно вносит возмущение в систему (измерение оказывается “инвазивным”). Это не только препятствует *повторным* измерениям (нужным для проверки неравенства Леггетта - Гарга), о чем беспокоились авторы статьи, но и делает *невозможным корректно выполнить текущее измерение* – ровно по той же причине, которая искажает двухщелевой опыт при наличии *which way* – контроля! Действительно, пусть нам дана суперпозиция двух равновероятных состояний, тогда при каждом измерении (за счет коллапса волновой функции) мы можем получить для  $Q$  значение либо  $+1$ , либо  $-1$ , и притом с вероятностью  $1/2$ , т.е. в точности то же, что и для классической макроскопической системы; наше измерение *разрушит* то состояние суперпозиции, которое имело место до измерения.

Так или иначе, с целью избежать подобной инвазивности (влияния процесса измерения на результат), Леггетт и Гарг придумали схему преодоления этой трудности, предложив специальную модель эксперимента с “идеальным негативным результатом”:

*Последний, по определению, является экспериментом, в котором измерительное устройство взаимодействует с системой (и при этом очень сильно) только если выдается одно значение  $Q(t)$  (скажем,  $+1$ ), но не взаимодействует в противном случае. Мы можем тогда с достоверностью считать, что  $Q(t)$  имеет значение  $-1$ , если в момент времени  $t$  система не извлекает отклика из измерительного аппарата. Совместно с гипотезой о макроскопическом реализме это в существенной мере подразумевает, что в системе также выполняется  $Q(t') = -1$  при  $t'$  непосредственно перед измерением в момент времени  $t$  (по крайней мере, в пределах сколь угодно короткого измерения) и, следовательно, что измерительный прибор не влияет на динамику системы, т.е. что условие неинвазивности справедливо. В отличие от двухщелевого эксперимента, где такое измерение может быть сделано пропусканием света только через одну щель, крайне сомнительно, можно ли аналогичное измерение сделано для р/ч СКВИДа, но эта трудность кажется чисто технической и непринципиальной. Приняв допущение, что*

эксперимент с идеально негативным результатом может быть осуществлен, очевидно, что все величины в соотношениях (7) и (8) могут быть измерены. Предположим, например, что мы хотим измерить [вероятность]  $\rho(Q_1=1, Q_3=1)$ . Поскольку динамика после момента  $t_3$  нас вообще не интересует, мы можем использовать однократное измерение в момент  $t_3$  и идеальную настройку на негативный результат в момент  $t_1$ , которая возникает, только если  $Q(t_1)=-1$ . Теперь мы просто отбрасываем те члены нашего ансамбля, которые дают результат в момент  $t_1$ . В остатке мы подсчитываем число событий, когда  $Q(t_3)=1$  и делим на полное число членов ансамбля, чтобы получить  $\rho(Q_1=1, Q_3=1)$ . Используя другую настройку с негативным результатом на другом большом идентичном ансамбле, мы можем получить  $\rho(Q_1=-1, Q_3=1)$ . Таким образом, мы можем рассчитать величину  $K_{13}$ , и гипотеза о неинвазивности измерения позволяет нам считать, что это именно то значение  $K_{13}$ , которое характеризует исходный ансамбль. [6]

Руководствуясь этими соображениями, группа экспериментаторов из Германии и Великобритании, осуществила соответствующий эксперимент [7]. Был разработан сценарий квантовых блужданий атома цезия, который в процессе квантовой диффузии перемещается в одномерном потенциале, созданном двумя независимыми оптическими решетками.

Микроволновый импульс переводит (операция С) атом в равную суперпозицию двух внутренних сверхтонких состояний основного электронного уровня, которые авторы обозначают, как это принято, соответственно через  $\uparrow$  и  $\downarrow$ . Далее, зависящая от текущего состояния операция сдвига S последовательно перемещает атом на одну ячейку вправо или влево в зависимости от приобретенного за счет С внутреннего состояния. Следовательно, чередуя С и S, можно осуществить одномерное квантовое блуждание в дискретном времени. В результате операции S атом, который находится в состоянии  $\uparrow$ , сдвигается из положения  $x$  в положение  $x - 1$ , а атом, который находится в состоянии  $\downarrow$ , сдвигается вместо этого из положения  $x$  в положение  $x + 1$ .

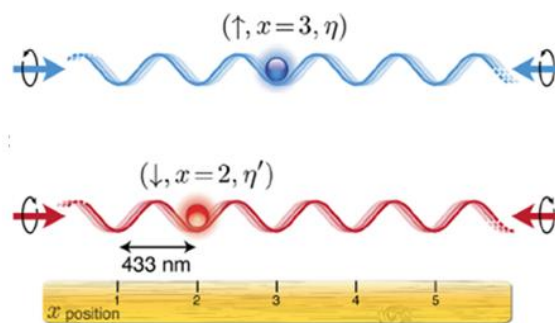


Рисунок 3 [7].

Транспортировка одиночных атомов Cs в зависящих от состояния периодических потенциалах. Две независимые оптические решетки создают из стоячих волн с противоположной круговой поляризацией, но одинаковой длиной волны  $\lambda = 866$  нм. В зависимости от внутреннего состояния ( $\uparrow$  или  $\downarrow$ ) атомы подвергаются действию потенциала той или другой решетки. В скобках указано состояние и номер ячейки.

Ссылаясь на идею Леггетта и Гарга об “идеальных негативных измерениях”, экспериментаторы приводят следующий иллюстративный пример. Представим

себе, что некоторый физический объект, подобно атому, может быть обнаружен только в двух положениях:  $x=\pm 1$ , и что мы проверяем наличие объекта при  $x=+1$ , не проверяя его наличие при  $x=-1$ . С точки зрения реалиста, отсутствие объекта при  $x=+1$  с необходимостью означает, что  $x=-1$ , никак не влияя на поведение объекта при измерении. Повторяя это измерение многократно, проверяя наличие объекта при  $x=+1$  и  $x=-1$  и “отбрасывая” все измерения, которые непосредственно обнаруживают объект, мы можем, таким образом, измерить корреляционную функцию типа  $k_{23}$ , никогда не интересуясь самим объектом в момент времени  $t_2$ .

Само измерение осуществляется благодаря формированию флюоресцентного изображения, которое определяет положение атома в заданной ячейке. “Отбрасывание” же реализуется следующим образом: если мы хотим неинвазивно детектировать наличие атома, скажем, в ячейке  $x=-1$ , мы удаляем атомы в состоянии ( $\downarrow$ ,  $x=+1$ ), транспортируя их далеко вправо, тогда как мы оставляем атомы в состоянии ( $\uparrow$ ,  $x=-1$ ) нетронутыми. Исходя из того, что этот сдвиг (в данном случае – 5 ячеек) *больше*, чем расстояние, покрываемое атомом между  $t_2$  и  $t_3$ , положение атома в момент  $t_3$  позволяет нам однозначно маркировать сдвинутые атомы (которые остаются “вмороженными” в потенциальную решетку) как эффективно удаленные с достоверностью более 99%. Следовательно, зависимое от состояния удаление атомов обеспечивает информацию о положении атома в момент  $t_2$  и, в то же самое время, исключает измерения, выполненные неинвазивно.

В эксперименте авторы зафиксировали нарушение неравенства Леггетта – Гарга на уровне вероятности, отвечающем  $6\sigma$ . Полученные результаты, по утверждению авторов, строго исключают любое объяснение квантовой транспортировки атома цезия по классическим хорошо определенным траекториям и свидетельствуют о его перемещении по *суперпозиции* возможных альтернативных траекторий<sup>3</sup>.

## 6. Заключение

Из неравенства (8) очевидно, что при равенстве нулю все трех коэффициентов корреляции оно справедливо. Вместе с тем расчеты показывают, что при различных комбинациях значений этих коэффициентов возможно нарушение неравенства (8). Из этого следует, что как и в случае *пространственных* неравенств Белла и Леггетта, нарушение *темпорального* неравенства Леггетта – Гарга однозначно и исключительно связано с коррелированностью результатов измерений<sup>4</sup>.

Но этот вывод приводит к очевидному заключению, что именно наличие корреляции может быть значительно более простым доказательством существования суперпозиции, нежели неравенство типа (8). Иными словами, не нужно измерять три коэффициента корреляции, достаточно измерить лишь один из них и сравнить его с нулем. При этом может быть использован тот же экспериментальный прием, что и описанный выше, но возможна и иная схема по

<sup>3</sup> Все же у нас остаются определенные сомнения в состоятельности идеи Леггетта – Гарга: в двухщелевом эксперименте контроль *хотя бы за одной* из альтернативных траекторий разрушает суперпозицию.

<sup>4</sup> Заметим, что в пространственном случае (например, с ЭПР-фотонами), величина корреляции задается двумя независимыми настройками анализаторов; в двухщелевом опыте величина корреляции определяется геометрической конфигурацией опыта с альтернативными траекториями; в модели Леггетта величина корреляции, по-видимому, тоже определяется физическими отношениями между альтернативами (например, геометрической и/или энергетической близостью альтернативных траекторий квантового блуждания).

типу двухцелевого эксперимента: например, для набора альтернативных траекторий можно сравнить вероятности  $P_1, P_2, \dots, P_n$  прохождения из начальной точки в финальную при контроле конкретной траектории (which way) с вероятностью  $P_0$  без такого контроля. Если сумма вероятностей  $P_1, P_2, \dots, P_n$  не будет равна  $P_0$ , то это будет означать, что складываются амплитуды, а не вероятности, т.е. будет подтверждено существование суперпозиции.

## Благодарность

МХШ выражает сердечную благодарность А.В. Каминскому за глубокое и плодотворное обсуждение содержания публикации; А.В. Каминский не несет, однако, ответственности за выводы, сделанные в работе.

## Приложение

### Простой пример суперпозиции, не связанный с квантовой механикой

Пусть у стойки паспортного контроля в аэропорту стоит группа из  $N=100$  человек, причем  $N_1=60$  из них имеют только гражданство страны А,  $N_2=30$  из них имеют только гражданство страны В;  $N_3=10$  из них имеют и гражданство страны А, и гражданство страны В.

Вероятность того, что у конкретного человека будет обнаружено гражданство только страны А, равна  $N_1/N = 6/10$ , тогда как вероятность того, что у конкретного человека будет обнаружено и гражданство страны А, и, возможно, гражданство страны В, равна  $P_1=(N_1+N_3)/N = 7/10$ .

Аналогично, вероятность того, что у конкретного человека будет обнаружено гражданство только страны В, равна  $N_2/N = 3/10$ , тогда как вероятность того, что у конкретного человека будет обнаружено и гражданство страны А, и, возможно, гражданство страны В, равна  $P_2=(N_2+N_3)/N = 4/10$ .

Таким образом, механическое сложение  $P_1$  и  $P_2$  даст в сумме величину, равную  $11/10$ , что больше 1. Поэтому мы должны учесть коррелированность событий 1 и 2. Найдем для этой группы из 100 человек корреляционный момент:

$$K_0 = (1/2) \cdot 10/100 = 5/100.$$

Правильное суммирование дает:

$$P_1 + P_2 - 2 \cdot K_0 = 11/10 - 1/10 = 1$$

т.е. получаем 1, как и должно быть для полной группы событий.

Отметим также, что если уже установлено гражданство страны А, то *условная* вероятность наличия у того же человека гражданства страны В будет равна  $P(B|A)=N_3/(N_1+N_3)=10/70=1/7$ . Аналогично, если уже установлено гражданство страны В, то *условная* вероятность наличия у того же человека гражданства страны А будет равна  $P(A|B)=N_3/(N_2+N_3)=10/40=1/4$ . Разумеется, при  $N_3=0$  (некоррелированные события) обе условные вероятности обратились бы в ноль.

## Ссылки

[1] A. Aspect. Bell's theorem: the naive view of an experimentalist. The text prepared for a talk at a conference in memory of John Bell, held in Vienna in December 2000. It has been published in "Quantum [Un]speakables – From Bell to Quantum information",



edited by R. A. Bertlmann and A. Zeilinger, Springer (2002). <http://arXiv.org/abs/quant-ph/0402001>

[2] S. Gröblacher et al. An experimental test of non-local realism. Nature 446, 871 (2007).

[3] R.P.Feynman, R.B. Leighton, M. Sands. The Feynman lectures on physics. Addison-Wesley publishing company, inc. 1963. Рус. пер.:Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. М., "Мир", 1976.

[4] Вентцель Е.С. Теория вероятностей. Изд. 4-е. М.: Наука, 1969. 576 с.

[5] A. Tonomura. Direct observation of thitherto unobservable quantum phenomena by using electrons. PNAS, October 18, 2005. Vol. 102, No. 42. P. 14952-14959.

[6] A. J. Leggett and A. Garg. Quantum Mechanics versus Macroscopic Realism: Is the Flux There When Nobody Looks? Phys. Rev. Lett. 54, 857-860 (1985).

[7] C. Robens et al. Ideal Negative Measurements in Quantum Walks Disprove Theories Based on Classical Trajectories. Phys. Rev. X 5, 011003 (2015).