/© М.Х.Шульман, 2008 (shulman@dol.ru)

Как перейти от классической механики к квантовой

(Обновлено 02.11.2008)

Аргументируется, что переход от классической механики к квантовой должен быть связан с учетом двух основных моментов. Во-первых, обычное “гладкое” движение, которое описывается обычными уравнениями динамики и действительными числами, необходимо дополнить учетом быстро осциллирующей компоненты движения и использованием комплексных величин. Во-вторых, для этой компоненты движения должен быть принят постулат о нелокальности осцилляторов, распространяющейся на всю Вселенную и учитывающей ее текущий размер.

Квантовая механика и комплексные величины

Квантовая механика (КМ) возникла, как известно, в первой трети 20-го века в результате революционного скачка, последовавшего за кризисом классической науки. Хотя с тех пор КМ добилась триумфальных результатов, она все еще не свободна от некоторых фундаментальных неясностей.

В 1925 г. В. Гейзенберг впервые представил координату и импульс квантовой частицы не действительными величинами, а в виде (бесконечного) ряда комплекснозначных гармоник (см. [**Jammer, 1967]**). В то же время он наложил дополнительные ограничения на амплитуды гармоник и правила умножения для этих величин (совпавшие, как выяснилось, с таковыми для матриц), откуда и было выведено все последующее.

Таким образом, в КМ появились комплекснозначные функции, физический смысл которых некоторое время оставался не очень ясным. В 1926 г. М. Борн предложил статистическую интерпретацию волновой функции, которая позволила рассчитывать распределения вероятностей для квантово-механических явлений.

И сейчас сфера применения комплексных величин в квантовой механике продолжает уточняться. Многие публикации используют, в частности, переход к мнимому времени (см., например, обзор **[Vainshtein et al., 1982]**); некоторые из них (например, **[Wu, 1995])** пытаются обосновать на этом пути результаты опытов **[Chiao et al., 1995]** по сверхсветовому распространению частиц через потенциальный барьер. Другие авторы работают с комплексными траекториями частиц: в работе **[Poirier, 2008]** автор исследует поведение плотности вероятности вдоль комплексной траектории и приходит к выводу, что в общем случае она не сохраняется; вместо этого в работе **[John, 2008]** изучается поведении плотности вероятности *вдоль действительной оси* комплексной траектории, и это позволяет успешно ввести расширенную аксиому сохранения вероятности, при которой плотность вероятности Борна может быть получена из мнимой части поля скоростей частиц.

Более общий, с моей точки зрения, подход связан с расширением классической механики на множество *комплексных* значений энергии и позволяет составить не только качественное, но и количественное представление о поведении частицы в классически запрещенных областях различных типов. В работе **[Bender et al., 2008]** сравнивается поведение классической частицы в двух случаях – при действительном и комплексном значении ее энергии. С помощью подробного численного исследования ряда одномерных моделей показано, что имеются тесные аналогии между вероятностным поведением квантовых систем с эрмитовым гамильтонианом и детерминистическим поведением систем классической механики, рассматриваемым в комплексной области (при этом и положение частицы представляется комплексным числом[1]).

Так, в указанной работе отмечается, что *квантовый* волновой пакет, который вначале локализован в одной яме, может туннелировать в другую яму. Комплексные решения *классических* уравнений движения демонстрируют замечательные аналогии такого поведения. Оказалось также, что классические решения представлены двумя семействами, которые подобны четным и нечетным квантово-механическим граничным состояниям. В случае *периодического* потенциала (кристаллическая решетка) квантовая частица может периодически туннелировать между смежными классически разрешенными областями и, таким образом, осуществлять локализованное случайное блуждание в виде скачков из области в область. Если энергия квантовой частицы принадлежит зоне проводимости, то частица свободно дрейфует вдоль периодически изменяющегося потенциала. Классическая частица с комплексной энергией осуществляет количественно и качественно аналогичное случайное блуждание, при этом существует узкая энергетическая полоса для каждой классической частицы, где она свободно движется в потенциальном поле.

В этой связи могут быть поставлены следующие важные вопросы:

- Какой физический смысл могут иметь комплексные величины в классической теории, с чем связано их использование?
- Что, помимо комплексных величин, необходимо добавить к классической механике, чтобы сделать ее в достаточной степени эквивалентной КМ?

Эти вопросы были подробно исследованы в книге **[Shulman, 2004]**, здесь моя точка зрения излагается в более компактном и дополненном виде.

Аналогия между КМ и теорией линейных электрических цепей переменного тока

Вообще говоря, комплексные величины используются для описания физических явлений с 17-го века, так что прецедентов более чем достаточно. Однако имеется одна замечательная аналогия, которая позволяет очень ясно установить обоснование и особенности применения именно для математического аппарата квантовой механики. Это – аналогия с теорией линейных электрических цепей переменного тока.

Еще в 1945 г. известный специалист в области линейных электрических цепей Г. Крон предлагал[2] с их помощью моделировать решение уравнения Шредингера **[Kron, 1945]**, получив вполне удовлетворительные результаты. Не зная о работах Крона, я в 2004 г. также обратил внимание на удивительное сходство двух билинейных выражений: в КМ простейшая вероятность обнаружить частицу дается произведением $\Psi^*\Psi$, а в теории цепей переменного тока мощность, выделяемая на участке цепи, дается произведением вида U^*I (U – напряжение, I – ток, звездочка обозначает операцию комплексного сопряжения).

Здесь напряжение U и ток I считаются комплексными гармоническими величинами, т.е. характеризуются соответствующими амплитудами, частотой и фазами. Их можно представить и с помощью действительных чисел:

---

[1] Забегая вперед, замечу, что добавление мнимой составляющей к действительной энергии системы физически равносильно (как будет показано ниже) учету быстро осциллирующей компоненты наряду с "гладкой". То же относится к координате и скорости частицы, однако обо всем этом авторы работы **[Bender et al., 2008]** не упоминают.

[2] Мне сообщил об этом П.В. Куракин в 2007 г.

$$u = u_m \sin \omega t, \quad i = i_m \sin(\omega t + \varphi),$$

где t - время, ω – круговая частота, φ – фазовый сдвиг гармоники тока относительно гармоники напряжения, индекс “m” отмечает максимальные значения. Мгновенная мощность (произведение этих величин) можно преобразовать в выражение

$$s = (u_m\, i_m /2)\, [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)]$$

Первое слагаемое в квадратной скобке равно постоянной величине, это – *активная* мощность, *необратимо* рассеиваемая ветвью. Второе слагаемое пульсирует с частотой 2ω и *средним нулевым значением*, оно отвечает чисто *колебательному обмену энергией*.

Возвращаясь к комплексному представлению, *усредненную за период полную* мощность W ветви обычно получают, умножая сопряженный комплекс U* на комплекс I, или наоборот – комплекс U на сопряженный комплекс I* (таким образом вычисляется W*). При этом *зависимость от времени* исчезает вследствие сложения в показателе экспоненты членов (iωt) и (-iωt), а результирующее выражение будет равно комплексной величине

$$W = (u_m\, i_m / 2)\, e^{i\varphi} = (u_m\, i_m / 2)\, (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Действительная часть в этом выражении отвечает активной мощности, а мнимая – реактивной (колебательной) мощности.

Заметим, что учет реактивного аспекта в чисто классической области можно проиллюстрировать на следующем примере: постоянный ток не может протекать в цепи с последовательно включенным конденсатором, однако переменный ток без труда “туннелирует” через него.

Правила коммутации для осцилляторов

Разумеется, все изложенное справедливо не только для электротехнических цепей, но и для любых физических осцилляторов. В частности, для механических осцилляторов вместо комплексов напряжения U и тока I следует использовать комплексы координаты Q и импульса P, а вместо комплекса мощности W – комплекс действия S. Главным здесь является именно возможность использования комплексного представления. При этом комплекс действия (энергии, мощности) играет роль, полностью аналогичную роли произведения Ψ*Ψ в КМ.

Более того, оперируя с комплексами, несложно построить для них коммутационные правила, полностью аналогичные правилам коммутации физических величин в КМ. Например, для действия S *одномерного* механического осциллятора, выраженного через комплексы координаты Q и импульса P, находим

$$[Q, P] \equiv Q^*{\cdot}P - Q{\cdot}P^* = S - S^* = q_m\, p_m\, (i \sin \varphi).$$

где φ – фазовый сдвиг P относительно Q. Если он равен, например, четверти периода (осциллятор *без потерь*), то мы получим просто $[Q, P] = i\, q_m\, p_m$.

В действительности квантовые частицы, как оказалось, соответствуют не одномерным, а *двумерным осцилляторам без потерь*. В этом случае мы имеем дело уже не с одной, а с двумя степенями свободы. При равенстве максимальных значений q_m , p_m и частоты колебаний ω *новая* степень свободы сводится к фазовому сдвигу между колебаниями вдоль различных пространственных осей. Таким образом – и это очень важное обстоятельство – двумерные осцилляторы могут иметь дополнительное физическое различие, которого в принципе не могло быть у одномерных (в том числе в электрических цепях) осцилляторов.

Назовем двумерным осциллятором 1-го рода (пульсатором) такой, у которого колебания вдоль обеих пространственных осей происходят синфазно, т.е. фазовый сдвиг между ними равен *нулю*. Двумерным же осциллятором 2-го рода (ротатором) назовем такой, у которого этот фазовый сдвиг *между колебаниями* вдоль различных осей составляет *четверть периода* (со знаком “плюс” или ”минус”). Достаточно рассмотреть сдвиг одного знака; если сдвиг имеет противоположный знак, можно мысленно переставить номера у пространственных осей). Можно показать **[Shulman, 2004]**, что осцилляторы 1-го рода фактически удовлетворяют коммутационным соотношениям, характерным для бозонов, тогда как коммутационным соотношениям для осцилляторов 2-го рода (и наличию *классического аналога спина* у осциллирующей материальной точки!) достаточно адекватно соответствуют фермионы.

Возникает вопрос – можно ли на основании развитого представления обосновать знаменитый *принцип запрета* Паули? Возможный положительный ответ заключается в следующем утверждении. Система двух осцилляторов 2-го рода должна была бы рассматриваться как *трехмерный* осциллятор 2-го рода, причем фазовый угол между колебаниями вдоль *любой* пары осей должен был бы составлять четверть периода. Очевидно, что такая комбинация фазовых сдвигов для ротатора не может быть реализована. Напротив, для существования трехмерных осцилляторов 1-го рода (синфазные пульсации по трем осям) нет никаких препятствий.

Переход к вероятности, “исчезновение” детерминизма

В нашей модели получены коммутационные соотношения, в правой части которых фигурирует умноженная на мнимую единицу амплитуда действия (энергии, мощности). Эти соотношения применимы для *осцилляторов 2-го рода* (классических аналогов фермионов) и описывают баланс *реактивной компоненты за период* колебаний (среднее значение равно нулю), при этом принципиально анализ может осуществлен для любой – сколь угодно малой – части этого периода. Если же мы ограничиваемся рассмотрением промежутков времени, достаточно больших по отношению к указанному периоду, то тем самым фактически переходим к статистическому описанию процесса.

Именно такой статистический подход доминирует в традиционной квантовой механике. Известная теорема Кеннарда и Робертсона (см. [**Jammer, 1967**]) сформулирована непосредственно как следствие *статистического* подхода: *если* каждый из двух квантово-механических операторов характеризуется определенной дисперсией измерения соответствующих им физических величин, *то* через квадратный корень из произведения этих двух дисперсий может быть выражен коммутатор двух исходных операторов (фактически это и есть доказательство соотношения неопределенности Гейзенберга).

Из вышесказанного мы можем заключить, что в квантовой механике в явном виде декларированы отказ от детерминистического описания и введение вероятностных представлений при рассмотрении процессов, которые протекают внутри характерных интервалов пространства-времени, отвечающих волновой природе этих процессов[3].

Нелокальность квантовой механики

Существенным моментом при переходе от классической механики к КМ является вопрос о нелокальности явлений во Вселенной. В течение ряда десятилетий роль нелокальности в КМ становится все отчетливее, причем в последние годы доминирует экспериментальное исследование этой проблемы, а именно ЭПР-эксперименты, эксперименты с интерферометрами, квантовая телепортация.

Первоначально нелокальность проникла в КМ через условия целочисленного квантования орбит и траекторий Бора-Зоммерфельда (именно подобные условия для задач типа потенциальной ямы ведут, например, к возможности туннелирования частиц через барьеры). Позже Р. Фейнман предложил альтернативную формулировку КМ, непосредственно основанную на возможности “виртуального путешествия” частицы сразу по всем возможным для нее во Вселенной траекториям (простая интерпретация этой формулировки и ее связь с некоторым колебательным процессом рассмотрены в Приложении к настоящей публикации).

Совпадение результатов, основанных на столь разных формулировках, говорит о том, что условие нелокальности действительно является основой реальных физических явлений. При этом в обе формулировки (одна и та же) постоянная $\hbar$ Планка вводится “руками”, ее смысл и происхождение до конца не прояснены[4].

Вернемся к рассмотрению наших осцилляторов без потерь, для которых мы используем не действительный, а комплексный гамильтониан

$$H\,(p,\,q) = p^2/2m + i\;kq^2/2$$

Заметим, что гамильтонова функция H при этом оказывается просто комплексно сопряженной к функции Лагранжа $L(p,\,q)$, а модуль (комплексной) энергии данном случае (из-за отсутствия потерь) является величиной постоянной.

При подходе, использующем лишь действительные величины, произведение импульса и координаты обладает коммутативностью, тогда как их комплексные представления, как мы видели, не коммутируют. В классической механике выполняется известное соотношение для скобки Пуассона (СП) импульса и координаты:

$$\{p,\,q\} = 1$$

В квантовой механике коммутатор импульса и координаты равен СП, умноженной на константу $\hbar$ с размерностью действия и деленной на мнимую единицу. Если аналогично определить СП через введенный выше (и равный чисто

---

[3] В статье **[Wang and Xiong]** показывается, что частица может даже преодолевать пространственно-подобный интервал порядка ее комптоновской длины волны, это обусловлено соотношением неопределенности Гейзенберга и согласуется с квантовой теорией поля.

[4] Авторы работы **[Bender et al., 2008]** отмечают возможность квантования для своих классических траекторий по аналогии с правилом Бора-Зоммерфельда, но не указывают на необходимость выбора при этом конкретной физической константы $\hbar$, взятой из опыта.

мнимой величине) коммутатор [P, Q] для действия классического осциллятора без потерь, то после сокращения на размерную константу и мнимую единицу получим в точности классическое соотношение для СП.

Различие, как видим, состоит в том, что для классического осциллятора константа с размерностью действия выражается через его индивидуальные характеристические параметры q_m и p_m (максимальные значения координаты и импульса), а в квантовой механике эта константа всегда имеет универсальное значение ħ. Поэтому напрашивается вывод о том, что ВСЕ без исключения квантовые осцилляторы характеризуются одним и тем же значением произведения $q_m p_m$, и что этому может быть подобрано внятное физическое объяснение.

Предлагаю читателю вспомнить задачу нерелятивистской квантовой механики о потенциальной яме конечной ширины. Для такой потенциальной ямы величина произведения ее импульса на длину волны де Бройля *всегда* равна константе $2\pi\hbar$. Более того, полагая периметр Вселенной конечным и мысленно увеличивая ширину ямы до тех пор, пока яма не заполнит *весь* этот периметр, мы все так же будем сохранять неизменным это соотношение. Как мне кажется, единственное разумное объяснение *неизменности* этого произведения состоит в том, что *импульс* с точностью до масштабного множителя *совпадает с числом (полу)периодов волновой функции*, то есть физически просто соответствует числу волн де Бройля, укладывающихся по периметру Вселенной, и это обстоятельство справедливо для *каждого* квантового осциллятора. В этом случае произведение $q_m p_m$ с точностью до размерного множителя равно периметру Вселенной.

Заключение

Таким образом, на основе классической механики мы построили модель, воспроизводящую такие важные особенности КМ, как лишенное ореола мистики использование комплексно-значных величин и прозрачные коммутационные правила для двух классов объектов (бозонов и фермионов). Модуль квадрата волновой функции, представляющий в КМ вероятность обнаружения частицы, в нашей интерпретации имеет очень близкий статус – с точностью до множителя это модуль плотности энергии частицы.

В то же время необходимо обратить внимание на следующее: мы фактически усложнили исходное базовое представление динамики, добавив к “обычному” относительно *гладкому* движению частицы осциллирующую без потерь компоненту движения. Таким образом, теперь *детерминистические* законы движения (закон Ньютона и т.п.) применимы лишь к первой компоненте, тогда как для описания высокочастотной осцилляции используется, по существу, *статистический* подход.

Он связан *с усреднением* по периоду осцилляции и фактически игнорирует эволюцию реактивной энергии движения, фокусируя внимание только на диссипации активной энергии[5].

---

[5] Заметим в этой связи, что в релятивистском уравнении Дирака свободному электрону отвечает собственное значение скорости, всегда равное по величине скорости света. С этим фактом связывается так называемый эффект “zitterbewegung” (“дрожание”) – движение частицы по спирали или по кругу, которое является ответственным за возникновение спина. Существование такого движения было впервые предложено Шредингером в 1930 г. Чтобы исключить этот эффект из описания, нужно отбросить матричные элементы, относящиеся к переходам между “электронным” и “позитронным” состояниями, что равносильно усреднению за период, большой по сравнению с ($\hbar/2mc^2$), где m – масса электрона, с – скорость света, ħ – постоянная Планка. В задачах

Дополнительно мы приходим к пониманию того, что физическая величина постоянной Планка может быть обусловлена текущим размером Вселенной.

Приняв во внимание все вышесказанное, мы, как мне кажется, в основном завершим обоснование логического перехода от классической механики к КМ.

Приложение

Р. Фейнман предложил альтернативную формулировку КМ, непосредственно основанную на возможности “виртуального путешествия” частицы сразу по всем возможным для нее во Вселенной траекториям. При этом постулируется следующая система правил:

- Перемещению частицы по *одной* из возможных траекторий между начальной и конечной точками ставится в соответствие *частная* комплексная *амплитуда вероятности* A ~ $\exp(-iS/\hbar)$, где i – мнимая единица, S – действие частицы для данного отрезка траектории, ħ – постоянная Планка.
- *Полная* комплексная *амплитуда вероятности* перемещения частицы между начальной и конечной точками находится *суммированием частных амплитуд* по всем возможным траекториям, соединяющим эти две точки.
- *Вероятность* перемещения частицы из начальной точки в конечную равна квадрату модуля полной амплитуды вероятности.

Здесь множитель $\exp(-iS/\hbar)$ для каждой траектории соответствует периодическому процессу с аргументом $\omega t = S/\hbar$, где ω – характерная частота, t – время. Поскольку процесс периодический, реальное значение имеет только разность фаз между конечной и начальной точками. Иначе говоря, экспоненциальный множитель осуществляет поворот соответствующей частной амплитуды на определенный угол.

Нечто очень похожее происходит в электрической цепи, где идеальный источник гармонического напряжения нагружен на несколько параллельных электрических ветвей, содержащих индуктивности и емкости. Каждая такая ветвь характеризуется своей комплексной проводимостью, обеспечивающей сдвиг фазы тока в этой ветви на соответствующий угол по отношению к фазе напряжения. При этом *токи ветвей будут складываться (и интерферировать)* точно так же, как амплитуды вероятностей в правиле Фейнмана.

Более того, суммарная *мощность* всех ветвей, усредненная за период колебаний, может быть представлена произведением суммарного тока на величину, комплексно к нему сопряженную. Таким образом, суммарная мощность оказывается вполне аналогичной (пропорциональной) вероятности перехода частицы из начальной точки в конечную.

нерелятивистской квантовой механики частоты осцилляции отвечают энергии стационарных состояний и переходам между такими состояниями.

Добавим, что, как показано в работе **[Beniaminov, 2007]**, движение в полном конфигурационном пространстве (координат и импульсов) классической механики, представленное суммой медленного “гладкого” и быстрого (с частотой $2mc^2/\hbar$) осциллирующего движения, вследствие специфической диффузии быстро сходится к упрощенной модели движения в подпространстве (только) импульсов или (только) координат. Это, кстати, порождает и возможную трактовку принципа неопределенности Гейзенберга.

Я хотел бы особо подчеркнуть здесь тот факт, что фейнмановский способ перехода к квантовой механике с помощью выражения (S/ħ) связан с явным введением некоторого *колебательного процесса* подобно действию внешнего идеального источника переменного напряжения в электрической аналогии. Далее, такой колебательный процесс характеризуется универсальным нормировочным множителем ħ. Его, как отмечено в основном тексте, можно рассматривать как фактор нелокальности, учитывающий текущий размер Вселенной.

Библиография:

[Bender et al., 2008] Carl M Bender, Dorje C Brody, and Daniel W Hook**.** Quantum effects in classical systems having complex energy. arXiv:0804.4169v1 [hep-th] 25 Apr 2008. Русский перевод “Квантовые эффекты в классических системах с комплексной энергией” доступен по ссылке
http://timeorigin21.narod.ru/rus_translation/Complex_power.pdf

[Beniaminov, 2007] Evgeny Beniaminov. Diffusion Processes in Phase Spaces and Quantum Mechanics. ArXiv:0803.2669v1 [math-ph] 18 Mar 2008.
Е.М. Бениаминов. ДАН, 2007, т. 416, № 1, с. 1-5

[Chiao et al., 1995] Raymond Y. Chiao, Paul G. Kwiat and Aephraim M. Steinberg. Quantum Nonlocality in Two-Photon Experiments at Berkeley. arXiv:quant-ph/9501016v1 18 Jan 1995. Сокращенный русский перевод “Сверхсветовое туннелирование фотонов” доступен по ссылке
http://timeorigin21.narod.ru/rus_translation/Tunneling_experiments.pdf

[**Jammer, 1967**] Jammer M. The conceptual development of quantum mechanics. Mc Graw-Hill, 1967. (Рус. пер.: Джеммер М. Эволюция понятий квантовой механики. Москва, Наука, 1985)

[John, 2008] Moncy V. John. Probability and complex quantum trajectories. arXiv:0809.5101v1 [quant-ph] 30 Sep 2008. Русский перевод “Вероятность и комплексные квантовые траектории” доступен по ссылке
http://timeorigin21.narod.ru/rus_translation/ Complex_trajectory.pdf

[Kron, 1945] Gabriel Kron. Electric Circuit Models of the Schrodinger Equation. Ph. Rev., vol. 67, №№ 1 and 2, January 1 and 5, 1945

[Poirier, 2008] Bill Poirier. On Flux Continuity and Probability Conservation in Complexified Bohmian Mechanics. arXiv:0803.0193v1 [quant-ph] 3 Mar 2008

[Shulman, 2004] Shulman M.H. Variations on Quantum Theory (in Russian). The brief English presentation is available at
http://timeorigin21.narod.ru/eng_quantum/Eng_variations.pdf
Шульман М.Х. Вариации на темы квантовой теории. Москва, Едиториал УРСС, 2004. Доступно по ссылке: http://timeorigin21.narod.ru/rus_quantum/Variations.pdf

[Vainshtein et al., 1982] Vainshtein A.I., Zakharov V.I, Shifman M. A., Novikov V.A. ABC-book of instanton. Uspekhy Phys. Nauk, 1982, April, vol. 136, № 4, p.p. 553-591
А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, В. А. Новиков, Л. А. Шифман. Инстантонная азбука. УФН, Апрель 1982, т. 136, вып. 4, с. 553-591

[Wang and Xiong] Zhi-Yong Wang, Cai-Dong Xiong. Quantum-mechanical Lorentz transformation and superluminal phenomenon.
http://lanl.arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0705/0705.2951.pdf
Русский перевод “Квантово-механическое преобразование Лоренца и сверхсветовой феномен” доступен по ссылке
http://timeorigin21.narod.ru/rus_translation/rus_superluminal.pdf

[Wu, 1995] Wu Zhong Chao. The Imaginary Time in the Tunneling Process. arXiv:0804.0210v1 [quant-ph] 1 Apr 2008. Русский перевод “Мнимое время в процессах туннелирования” доступен по ссылке
http://timeorigin21.narod.ru/rus_translation/Im_time_1.pdf