Неравенства Белла, Леггетта и квантовая суперпозиция

А.В. Белинский[1], М.Х. Шульман[2]

Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова

Неравенства Белла выведены исходя из двух посылок: (а) реальность существования конкретных значений измеряемых величин *до* момента измерения, и (б) локальность – отсутствие какого-либо взаимовлияния двух пространственно разделенных измерительных устройств, осуществляющих регистрацию квантовых частиц.

Нарушение этих неравенств свидетельствует о неадекватности или одного из этих условий, или обоих сразу. Попытки выяснить истинную причину этого нарушения лежат в области изобретения новых экспериментов, которые бы разделили друг от друга нелокальность и классическую реальность. Осознание этого факта верифицировалось в [1], а предложение конкретного эксперимента – в [2], где доказано отсутствие априорного значения определенного числа фотонов в поле до момента их регистрации. В [2] в явном виде не использовалась гипотеза локальности, хотя, строго говоря, и там можно придумать некую абсурдную нелокальную теорию, в которой либо фотоны бы перескакивали из одного канала регистрации в другой, проходя сквозь непрозрачные стенки, либо фоторегистраторы оказались бы связаны таинственной связью неизвестной природы.

Дальнейшие усилия в этом направлении связаны с именами Леггетта и Гарга [3], предложившими темпоральное неравенство, в котором нет пространственно разделенных измерителей и, соответственно, нет необходимости привлечения постулата о локальности; кроме того, в работе [4] было предложено неравенство для пространственно разделенных объектов, нарушением которого можно исключить влияние одного из видов нелокальности: нелокальной связи *измерительных устройств*, т.е. зависимости результата измерения от, скажем, их взаимной ориентации, а в [5] осуществлен эксперимент. Однако, исключить нелокальность в более сильном ее проявлении, а именно, зависимости *результатов измерений* одного регистратора от *результатов* измерений другого, эти работы не в состоянии. Тем не менее, имеющиеся теоретические и экспериментальные данные, как представляется, позволяют надежно констатировать непреложный факт отсутствия определенных значений измеряемых величин до момента их регистрации, т.е. реальное существование квантовой суперпозиции, когда, образно говоря, шрёдингеровский кот и ни жив, и ни мертв.

1. Введение

Неравенства Белла выведены исходя из двух посылок: (а) реальность существования конкретных значений измеряемых величин *до* момента измерения, и (б) локальность – отсутствие какого-либо взаимовлияния двух пространственно разделенных измерительных устройств, осуществляющих регистрацию квантовых частиц. Напомним, что в стандартной форме неравенство Хорна-Клаузера-Шимони-Холта записывается в виде [6]:

$$|E(a,b) - E(a,b') + E(a',b) + E(a',b')| \le 2 \qquad (1)$$

где a и a' - настройки (в ЭПР-опыте – углы поворота призм) на стороне А, b и b' - настройки на стороне В, четыре комбинации тестируются в четырех раздельных экспериментах. Члены вида $E(a, b)$ и т.д. – это квантовые корреляции результатов для пар частиц, где квантовая корреляция определена как математическое ожидание произведения соответствующих “результатов”эксперимента (+1 или -1), т.е. статистическое среднее от $A(a)\cdot B(b)$.

[1] e-mail: belinsky@inbox.ru
[2] e-mail: shulman@dol.ru

Квантовая механика предсказывает, что $E(a,b)=\cos\varphi$, где φ – удвоенная разность между углами поворота призм для настроек a и b. В общем случае в трех членах разности углов могут быть различными; четвертый же угол является простой функцией от первых трех. Из соображений симметрии следует, что максимальное нарушение неравенства (1) достигается, если принять все три разности углов поворота в указанных трех членах неравенства (1) одинаковыми. Обозначив эту величину через φ, легко вывести из (1) результирующее неравенство

$$| 3 \cos\varphi - \cos 3\varphi | \leq 2. \quad (2)$$

На рис. 1 видно, что график значений левой части неравенства (2) пересекает горизонтальную границу 2 (правая часть неравенства) при определенных значениях угла φ, что отличает квантовый характер ситуации от классической.

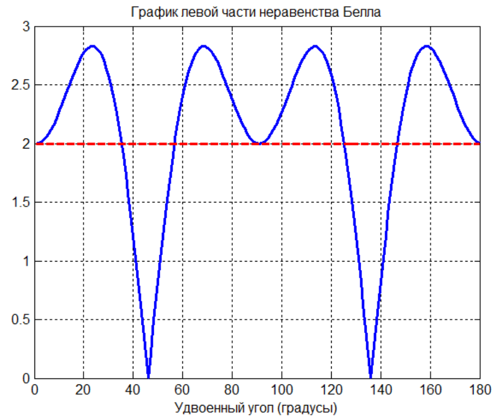

Рисунок 1. Нарушение CHSH-неравенства при определенных значениях двойного угла разности между ориентациями двух поляризаторов

Нарушение неравенства (2) свидетельствует о неадекватности или одного из этих условий (а) и (б), или обоих сразу. Попытки выяснить истинную причину этого нарушения лежат в области изобретения новых экспериментов, которые бы разделили друг от друга нелокальность и классическую реальность. Осознание этого факта верифицировалось в [1], а предложение конкретного эксперимента – в [2], где доказано отсутствие априорного значения определенного числа фотонов в поле до момента их регистрации. В [2] в явном виде не использовалась гипотеза локальности, хотя, строго говоря, и там можно придумать некую абсурдную нелокальную теорию, в которой либо фотоны бы перескакивали из одного канала регистрации в другой, проходя сквозь непрозрачные стенки, либо фоторегистраторы оказались бы связаны таинственной связью неизвестной природы.

Правда, в литературе можно встретить и другие мнения. Так, известный исследователь проблем квантовой нелокальности (и организатор ряда международных конференций по этой проблематике, в которых принимали участие известные физики) А.Ю. Хренников [7] отстаивает подход, согласно которому физики просто некорректно обращаются с современной теорией вероятностей, неявно используя “неколмогоровские” модели. Приводится такое сравнение: если не знать о существовании геометрии Лобачевского, то при выявлении “неевклидового” поведения можно прийти к заключению о “не-реализме”; в некотором смысле это действительно “не-реализм”, но только в евклидовой реальности. Нарушение “колмогоровости” может интерпретироваться как “не-реализм” или нелокальность, однако это отрицание только колмогоровской реальности.

Дальше автор [7] пишет: “В классической теории вероятностей исследователи никогда не пытаются поместить статистические данные, собранные в экспериментах с различными представительными выборками, в единое вероятностное пространство. Однако в квантовой механике мы (по крайней мере, Белл и его сторонники) пытаемся это сделать. С точки зрения “вероятностной оппозиции” к стандартной интерпретации нарушения неравенства Белла, основная проблема в ходе анализа Белла состояла в том, чтобы совместить статистические данные нескольких целиком отличающихся экспериментов (соответствующих различным настройкам поляризационных светоделителей) в едином вероятностном неравенстве”. Подкрепляя свой тезис, автор [7] приводит (со ссылкой на [8]) пример системы трех случайных чисел, принимающих значения +1 или -1, для которых корректно можно определить неотрицательные *попарные* совместные вероятности так, что сумма всех совместных вероятностей оказывается равной единице. Однако в общем случае нельзя[3] построить совместное распределение для любой *тройки* этих случайных величин: оказывается, что некоторые из этих тройных совместных вероятностей будут *отрицательными*! Этот факт противоречит неравенству Белла для корреляций. Далее указывается, “что, следуя Булю, мы рассматриваем неравенство Белла просто как необходимое условие для вероятностной совместности”.

Таким образом, А. Ю. Хренников связывает невыполнение неравенства Белла не с гипотезой локальности, а с некорректностью использования теории вероятностей и, в частности, с возможностью появления отрицательных вероятностей. Между тем, в работе [2] выведено неравенство Белла в традиционной форме CHSH-неравенства, исходя именно из предположения о неотрицательности ряда возникающих при этом вероятностей. Однако в завершение своего вывода автор [2] оговаривается, что в неявном виде предположение о локальности все же было при этом использовано: результат наблюдения первого наблюдателя считался независящим от состояния измерительной аппаратуры второго наблюдателя, т.е. от угла его поляризатора.

2. Пространственное неравенства Леггетта

Дальнейшие усилия в этом направлении связаны с именем Леггетта. В работе [4] им было предложено неравенство для пространственно разделенных объектов, нарушением которого можно исключить влияние одного из видов нелокальности: нелокальной связи *измерительных устройств*, т.е. зависимости результата измерения от, скажем, их взаимной ориентации. Однако, исключить нелокальность в более сильном ее проявлении, а именно, зависимости *результатов измерений* одного регистратора от *результатов* измерений другого, эти работы не в состоянии. Тем не менее, имеющиеся теоретические и экспериментальные данные, как представляется, позволяют надежно констатировать непреложный факт отсутствия определенных значений измеряемых величин до момента их регистрации, т.е. реальное существование квантовой суперпозиции, когда, образно говоря, шрёдингеровский кот и ни жив, и ни мертв.

В статье [5] пространственное неравенство Леггетта было адаптировано с целью последующей (в рамках той же статьи) экспериментальной проверки. Авторы [5] для обобщенной схемы ЭПР-опыта дают одному наблюдателю (Алисе) выбрать ее наблюдаемую из совокупности двух настроек $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, а другому наблюдателю (Бобу) – из совокупности трех настроек $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ и $\vec{b}_3=\vec{a}_2$, и получают следующее обобщенное неравенство типа (пространственного) неравенства Леггетта:

$$|E_{11}(\varphi)+E_{23}(0)|+|E_{22}(\varphi)+E_{23}(0)|\le 4-\frac{4}{\pi}|\sin\frac{\varphi}{2}| \quad (3)$$

---

[3] Этот общий результат, как отмечено в [7], установил еще 100 лет назад создатель булевой логики Джорж Буль.

где $E_{kl}(\varphi)$ - равномерное (с одинаковыми весами) среднее по всем функциям корреляции, определенным в плоскости $\{\vec{a}_k, \vec{b}_l\}$ с одним и тем же разностным углом φ. Для применяемого неравенства векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{b}_1$ с необходимостью лежат на сфере Пуанкаре в плоскости, которая ортогональна плоскости, заданной векторами $\vec{a}_2$ и $\vec{b}_2$. Как отмечено в [5], функция квантовой корреляции для измерений $\vec{a}_k$ и $\vec{b}_l$, выполненных над фотонами, зависит только от углов разности между этими векторами, и, следовательно, $E_{kl} = -\cos\varphi$, таким образом, квантовое предсказание для (3) переходит в

$$|2(\cos\varphi + 1)| \le 4 - \frac{4}{\pi}|\sin\frac{\varphi}{2}| \quad . \tag{4}$$

На рис. 2 приведены графики значений левой и правой частей неравенства (4), а также величины разности между ними. Максимальное отклонение от неравенства имеет место при φ =18.8º, что и было подтверждено экспериментально.

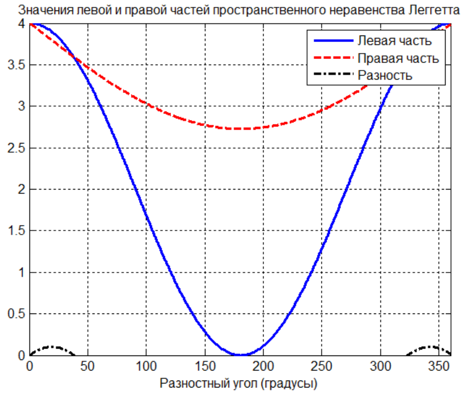

Рисунок 2. Нарушение пространственного неравенства Леггетта при определенных значениях угла разности между ориентациями поляризаторов

3. Темпоральное неравенство Леггетта

Достаточно неожиданным оказался переход от пространственно разделенных измерений к измерениям над одним и тем же объектом, но выполненным в разные моменты времени. В работе [3] Леггетт и Гарг предложили темпоральное неравенство, в котором нет пространственно разделенных измерителей и, соответственно, нет необходимости привлечения постулата о локальности.

Авторы [3] рассматривали квантовый кубит – сверхпроводящее кольцо, разделенное на две области переходом Джозефсона. В кольце (многократно) создавался “вмороженный (trapped)” магнитный поток с W-образным распределением потенциала в зависимости от потока; если локализация потока при измерениях имеет место в “левой” половине графика, то наблюдаемой Q ставится в соответствие значение +1, а если в правой – то значение -1. Пусть измерения дихотомической величины Q производятся подряд три раза и дают результаты Q_1, Q_2 и Q_3.

Тогда справедливо следующее неравенство[4]:

$$|Q_1Q_2 + Q_2Q_3)| \le |1 + Q_1 \cdot Q_3| \tag{5}$$

[4] *Доказательство*: 1) Пусть $Q_1 \cdot Q_3 = -1$, тогда $Q_1 + Q_3 = 0$, $(1 + Q_1 \cdot Q_3) = 0$, т.е. $0 \le 0 \le 0$.
2) Если же $Q_1 \cdot Q_3 = 1$, тогда $Q_1 + Q_3 = \pm 2$, $(1 + Q_1 \cdot Q_3) = 2$, т.е. $-2 \le (Q_1Q_2 + Q_2Q_3) \le 2$.
Но величина $(Q_1Q_2 + Q_2Q_3)$ по модулю не может быть больше 2, поэтому и в данном случае неравенство выполняется. ■

Далее, такая тройка измерений выполняется многократно, результаты усредняются, произведения Q_1Q_2, Q_2Q_3 и Q_1Q_3 в результате усреднения дают коэффициенты корреляции k_{12}, k_{23} и k_{13}, и возникает темпоральное неравенство Леггетта-Гарга, которое должно удовлетворяться, если между измерениями поток находится в однозначно определенном состоянии (не в состоянии суперпозиции):

$$| k_{12} + k_{23}) | \leq | 1 + k_{13} | \quad (6)$$

Наши расчеты (варьирование коэффициентов корреляции k_{12}, k_{23} и k_{13} в диапазоне от -1 до +1) показали, что и в этом случае значения коэффициентов определяют факт выполнения или невыполнения базового неравенства (6). Область, где неравенство выполняется, на диаграмме в координатах k_{12}, k_{23} и при фиксированном k_{13} является диагональной, простирающейся из левого верхнего угла в правый нижний (см., например, рис. 6 при $k_{13} = 0$). По мере стремления k_{13} от -1 к +1 область справедливости неравенства Леггетта-Гарга от узкой линии (проходящей из левого верхнего до правого нижнего угла при k_{13}=-1) постепенно расширяется относительно этой диагонали и, в конце концов (при k_{13}=1), заполняет весь график.

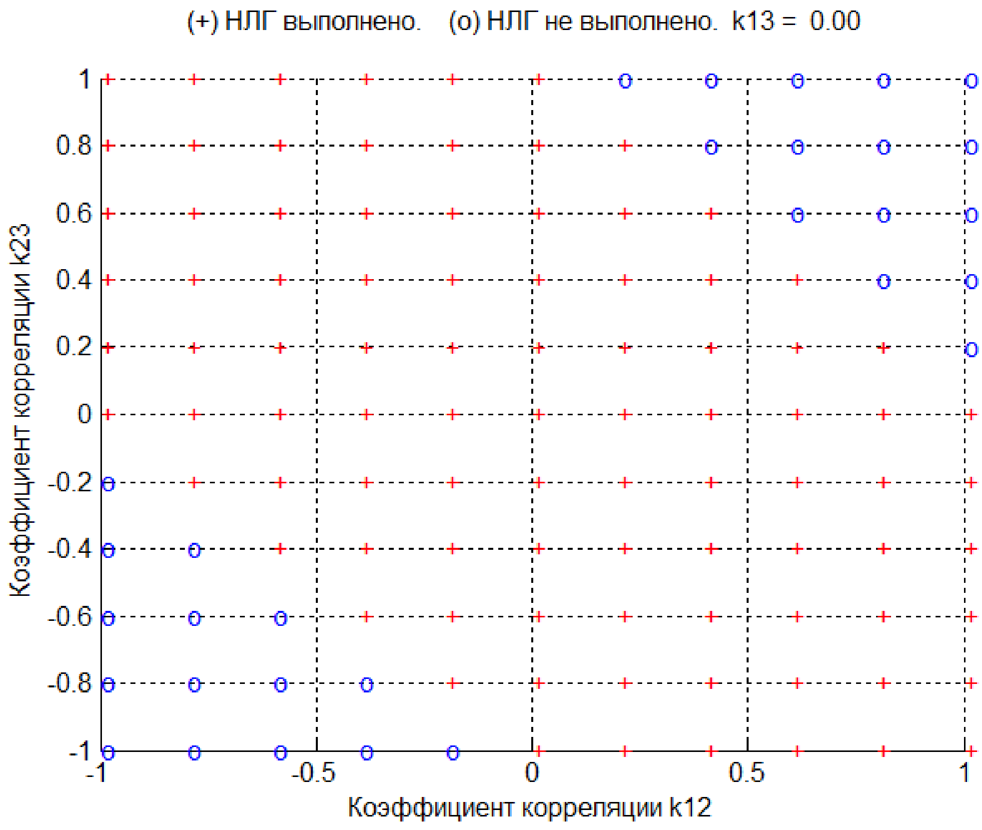

Рисунок 3. Область справедливости темпорального неравенства (6)

Красным значком “+” отмечены точки, где неравенство (6) выполняется (т.е. левая часть не превосходит правую), а синим значком “o” – точки, где неравенство (6) не выполняется (т.е. левая часть больше правой). По горизонтальной оси отложены значения k_{12} (от -1 до +1), по вертикальной оси отложены значения k_{23} (от -1 до +1).

Дополнительно нами был построен рис. 4, показывающий, как в количественном отношении возрастает доля точек, в которых выполняется неравенство (6), и убывает степень нарушения (Dmax) этого неравенства по мере изменения $k_{12} = k_{23} = k_{13}$ (т.е. все три коэффициента корреляции принимались одинаковыми) от -1 до +1.

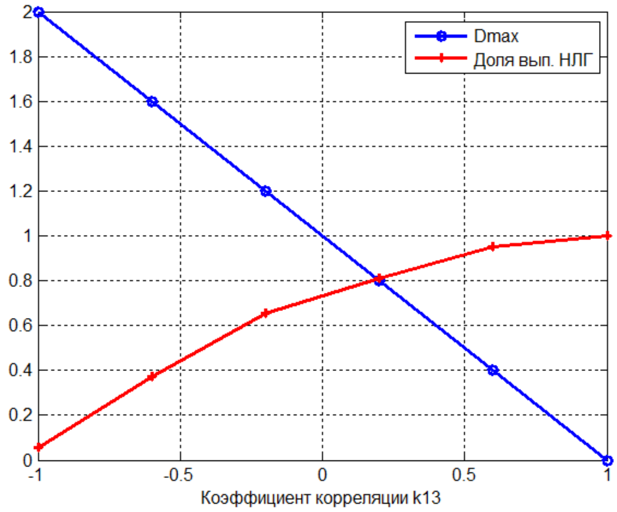

Рисунок 4.

Зависимость максимального нарушения (Dmax) неравенства (6) и относительной доли числа точек, в которых неравенство (6) выполняется, в зависимости от k_{13}.

4. Фундаментальные квантовые неравенства и коррелированность состояний

Можно согласиться с А. Ю. Хренниковым в том, что использование понятия вероятности требует уточнения факта существования (неотрицательности) используемых распределений и, в том числе, анализа соответствия (в конкретном контексте) этого понятия аксиоматике теории вероятностей. Вместе с тем, нам представляется слишком ограничительным требование вообще не рассматривать совместно статистику результатов, полученных в подмножествах опытов с различными настройками анализаторов; рассуждая таким образом, можно, по нашему мнению, дойти до утверждения, что каждый единичный опыт уникален и неповторим (а если во время опыта за стенами лаборатории проезжал трамвай?), и что статистике вообще нет места в физике; здесь хорошо бы “не выплеснуть ребенка вместе с водой”. Иными словами, не в таких, чисто формальных причинах мы усматриваем источник появления подобных квантовых неравенств.

Ряд авторов приходит к идее о том, что решающим для невыполнения неравенств Белла и Легетта является факт коррелированности состояний. Например, автор [9] пишет: “<…> при наличии запутанности нелокальность нерелятивистской квантовой механики на микроуровне не только можно, но и нужно рассматривать как основной (но не единственный!) источник корреляций и, следовательно, причину нарушения CHSH-неравенства <…> Чтобы делать уверенные суждения только о возможности одновременного существования / несуществования элементов физической реальности, следует избавиться от источников потенциальных корреляций”. В частности, автор [9] аргументирует, что такое существование / несуществование однозначно связано с существованием / несуществованием совместных неотрицательных распределений вероятностей. Действительно, соответствующие состояния могут перестать быть “элементарными по Колмогорову” тогда и только тогда, когда области существования этих (в общем случае не-элементарных) состояний перекрываются, либо между ними имеется непустой “разрыв”, что как раз и означает появление (положительных или отрицательных) корреляций.

Добавим, что коррелированными в квантовой механике бывают запутанные состояния, представляющие собой суперпозиции некоторых выделенных базисных состояний. В то же время имеет смысл говорить и о суперпозиции (т.е. коррелированности), например, альтернативных классических траекторий – в частности, при прохождении электронов или фотонов через несколько щелей или в процессе квантового блуждания атомов. Собственно говоря, такого рода суперпозиция альтернатив лежит в основе фейнмановского формализма интегралов по путям.

Все вышесказанное убедительно, с нашей точки зрения, подтверждается предложенными выше графическими свидетельствами однозначной связи между степенью коррелированности и областью справедливости левой части соответствующего неравенства (рис. 1 – 4). С точки зрения математики при этом даже не столь существенно, обеспечивается ли эта коррелированность частей системы законами квантового мира или, например, каким-либо хитроумным инженерным алгоритмом коммуникации между ними.

Если же, однако, речь идет именно о законах квантового мира, то трудно отрицать, что, например, в ЭПР-опыте *до* момента измерения запутанная пара фотонов пребывает в состоянии суперпозиции и не имеет однозначно определенного состояния, такое состояние возникает только в результате процедуры измерения хотя бы над одним из фотонов. Далее, надежно показано (см., например, [10]), что результаты измерения, по крайней мере, статистически, обусловлены разностью углов поворота поляризационных призм, который можно было варьировать буквально “в самый последний момент” перед измерением. Но именно эта разность углов определяет величину корреляции, а это значит, что результаты измерения (финальные состояния фотонов) обусловлены только и единственно величиной корреляции, зафиксированной к моменту измерения.

Признание *математической* первичности феномена коррелированности состояний при выводе упомянутых неравенств, к сожалению, не решает важной *физической* проблемы: с помощью какого конкретного физического механизма эта (в частности, нелокальная) коррелированность реализуется, и требует ли такой механизм расширения современных физических представлений. Эта проблема все еще требует своего решения.

Ссылки

[1] А.В. Белинский, Д.Н. Клышко. Интерференция света и теорема Белла. УФН, т. 163, № 8 (1993) с. 1 - 45.

[2] А.В. Белинский. Квантовые измерения. БИНОМ. Лаборатория знаний. М., 2008

[3] A. J. Leggett and A. Garg. Quantum Mechanics versus Macroscopic Realism: Is the Flux There When Nobody Looks? Phys. Rev. Lett. 54, 857-860 (1985).

[4] A.J. Leggett. Nonlocal Hidden-Variable Theories and Quantum Mechanics: An Incompatibility Theorem. Found. of Phys. **33**, 1469-1493 (2003).

[5] S. Gröblacher et al. An experimental test of non-local realism. Nature 446, 871 (2007).

[6] I.F. Clauser, M.A. Horn, A. Shimony, R.A. Holt. Phys. Rev. Lett., 1969, v. 23, p.880.

[7] Andrei Khrennikov. Bell’s inequality: Physics meets Probability arXiv:0709.3909v1 [quant-ph] 25 Sep 2007. А.Ю. Хренников. Эксперимент ЭПР-Бома и неравенство Белла: квантовая физика и теория вероятностей. Теоретическая и математическая физика, том 157, № 1 (2008).

[8] Н.Н. Воробьев, ТВП, 7 (1962), 153–169.

[9] Н.В. Никитин. Матрица плотности. Курс лекций. Кафедра физики атомного ядра и квантовой теории столкновений. Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2015 г. http://nuclphys.sinp.msu.ru/dm/Matrica-plotnosti-Nikitin-2015.pdf

[10] A. Aspect. Bell's theorem: the naive view of an experimentalist. The text prepared for a talk at a conference in memory of John Bell, held in Vienna in December 2000. It has been published in “Quantum [Un]speakables – From Bell to Quantum information”, edited by R. A. Bertlmann and A. Zeilinger, Springer (2002). http://arXiv.org/abs/quant-ph/0402001