ШУЛЬМАН М.Х.

О ЧИСЛЕННОСТИ, ПРОТЯЖЕННОСТИ И ДЛИТЕЛЬНОСТИ

Аннотация

В настоящей публикации делается попытка прокомментировать такие универсально используемые понятия, как численность, пространственные и временные размеры объектов и процессов, и отметить всеобщий характер связи между размерами систем и типом взаимодействий в них.

1. ОБЪЕКТЫ И ПРОЦЕССЫ КАК ПРЕДМЕТ НАУЧНОГО ИЗУЧЕНИЯ

В основе науки вообще и, в частности, естественных наук лежит некоторый фундамент представлений, несущих на себе все здание теоретических и прикладных знаний. Этим фундаментальным представлениям посвящены высказывания и размышления многих корифеев науки. К числу таких представлений относятся и такие понятия, как численность, пространственные и временные размеры объектов и процессов. В заключительной части публикации обсуждается всеобщий характер связи между размерами систем и типом взаимодействий в них.

Такие термины, как *объект* и *процесс*, используются в научном анализе повсеместно. Под объектом мы будем понимать сущность, которая в большей или меньшей степени сохраняет с течением времени все или наиболее важные свои признаки, несмотря на некоторую вполне допустимую эволюцию. Часто (но далеко не всегда) таким признаком является известное постоянство пространственной конфигурации тела, предмета в сопутствующей системе отсчета, т.е. полная или частичная независимость его пространственных свойств от времени. В то же время нас, как правило, не смущает даже весьма заметная эволюция объектов. Например, новорожденный младенец мало похож на взрослого человека, в том числе и по своим размерам, однако мы уверенно отождествляем их в том случае, когда речь идет об одном и том же человеке. Более того, мы имеем в виду один и тот же объект (точнее, одного и того же субъекта), когда говорим, скажем, о мифическом оборотне, т.к. полагаем самоидентичной истинную (внутреннюю) сущность его различных обликов.

При отождествлении объекта могут возникать и логические коллизии, как, например, в известной проблеме отождествления с самим собой деревянного корабля, в котором сначала заменили одну доску, затем другую, затем половину всех досок, а затем и все остальные. Трудно в этом случае указать момент, когда объект перестал быть самим собой, если применять дихотомический (да-нет) подход. Эта трудность поддается решению при использовании непрерывной меры различия/сходства объектов. Подобные ситуации не так уж умозрительны или схоластичны, как может показаться. Например, с ними современная физика сталкивается при переходе к описанию систем тождественных частиц (см. замечательный анализ проблемы в [1]).

Объекты, с которыми имеет дело наука, редко изучаются сами по себе. Как правило, они представляют собой некоторую систему более элементарных объектов и/или сами являются элементами некоторой системы. *Система* характеризуется тем, что между ее элементами существуют определенные взаимодействия. Таким образом, система – это нечто существенно большее, чем простая совокупность своих элементов, поскольку необходимо учитывать еще и множество определенных для нее статических и/или динамических отношений между этими элементами.

Под процессом мы будем понимать изменение со временем свойств объекта или системы. При описании систем, для которых любыми изменениями в конкретном случае допустимо пренебречь, нет смысла использовать понятие процесса; такие системы называются статическими (производные по времени от характеристик процесса равны нулю). Процессы, в ходе которых изменения свойств хотя и учитываются, но имеют более или менее повторяющийся, устойчивый или статистически постоянный характер, например, строго периодические, называются стационарными (характеристик процесса в среднем по времени постоянны). Добавим, что обычно процесс рассматривается применительно к той системе объектов, изменение свойств которых исследуется.

2. ЧИСЛО, РАЗМЕР И ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ КАК ИСХОДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Численность, протяженность и длительность – это то, что мы обычно и в первую очередь непосредственно видим и воспринимаем в сущностях, составляющих наш Мир. Что же представляют собой эти характеристик? Можем ли мы дать им определение, используя еще более элементарные логические понятия?

2.1. Численность

Категория численности представляется наиболее фундаментальной. В отличие от протяженности и длительности, она не связана жестко с геометрическими представлениями. Это означает, что могут существовать области реальности, в которых пространственные и/или временные отношения не определены или определены не так, как в нашей физической Вселенной, но численность остается той сущностью, которая сохраняет свой смысл. В качестве примера такой реальности можно сослаться на “внутренний мир” компьютера.

Лично для меня все целые числа делятся на 3 смысловые группы. Первая группа состоит из числа 1, которое олицетворяет количественную меру отдельно взятой или вообще единственной сущности, в этом случае количественный анализ как таковой просто не требуется. Вторая группа состоит из не менее интересного числа 0, которое явно указывает на отсутствие объектов данного типа, но в скрытом виде подразумевает, что таковое отсутствие не носит, так сказать, абсолютного характера – в другое время и/или при других обстоятельствах это число объектов может стать и отличным от нуля. Кроме того, число 0 может маскировать сбалансированность двух или более величин, например – суммарный электрический заряд нейтрального атома

при равных количествах в нем отрицательно заряженных электронов и положительно заряженных протонов. Ну и, наконец, в состав третьей группы входят все остальные целые числа.

Интересное определения числа дается в элементарной теории множеств. Так, например, число 5 – это то общее, что присуще любому множеству из 5 предметов (5 стульев, 5 верблюдов и т.п.). Таким образом, числа выступают абстрактными представителями множеств реально существующих объектов. Числа допускают и геометрическую интерпретацию. Например, действительные числа (в том числе, конечно, целые) могут изображаться точками на числовой оси, а комплексные числа – точками на плоскости.

Не следует думать, что физики имеют дело только с конечными количествами. Например, в квантовой теории поля используется представление о бесконечном числе осцилляторов (степеней свободы). Но можно ли строго оперировать с бесконечными числами? Оказывается, да, и математики придумали для них разнообразные, весьма хитроумные и далеко идущие обобщения. Например, в теории множеств вводятся и изучаются кардинальные и ординальные числа [2, 3].

Кардинальное число характеризует множество с точки зрения запаса его элементов – мощности множества – и представляет собой обобщение понятия количественного числа на бесконечные множества. В области конечных множеств их эквивалентность по мощности устанавливается проверкой того, равны ли эти мощности одному и тому же (конечному) числу. В области бесконечных множеств поступают несколько по-другому: ищут способ установить взаимно-однозначное соответствие между элементами двух множеств. Если такой способ находится, мощности множеств считаются эквивалентными. Далее, если удается установить эквивалентность по мощности между первым множеством и подмножеством второго множества, то мощность первого множества считается в общем случае меньшей, чем мощность второго множества. Впрочем, для бесконечных множеств, в отличие от конечных, это не всегда так: мощность подмножества может оказаться и равной мощности включающего его множества. Например, множество всех натуральных чисел равномощно своему подмножеству, состоящему только из четных чисел, поскольку между ними тривиально устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Множество все подмножеств данного непустого множества всегда порождает новое множество, мощность которого строго больше мощности данного множества. Доказательство этого утверждения проводится замечательно красивым так называемым “диагональным” методом Кантора. В применении к конечным множествам эта процедура порождает широко известные парадоксы типа солдата-парикмахера, который бреет все тех и только тех солдат своей роты, которые не бреются сами. Разумеется, по отношению к самому парикмахеру это определение противоречиво.

Множества, равномощные (бесконечному) множеству всех натуральных чисел, называются счетными множествами. Их мощность называют “алеф-нуль”. Любое действительное число может быть представлено конечной или

бесконечной последовательностью цифр, т.е. их счетным множеством. Мощность множества всех действительных чисел, т.е. всех подмножеств счетного множества, образует более мощное (чем счетное) множество. Его мощность называется мощностью континуума, или “алеф-один”. Знаменитая континуум-гипотеза ставила вопрос о том, существует ли множество, мощность которого меньше мощности континуума, но больше мощности счетного множества. В конце 20-го века было доказано, что ни само это утверждение, ни его отрицание в стандартной теории множеств не доказуемы, и что его справедливость или ложность зависит от принятого расширения аксиоматики теории множеств.

С другой стороны, одно и то же бесконечное множество можно по-разному упорядочить. Анализ понятия порядка позволяет ввести понятие ординального (порядкового, трансфинитного) числа. Для конечных множеств кардинальное и ординальное числа совпадают между собой и равны количеству элементов множества. В общем случае множество называется упорядоченным, если в нем для любых двух его элементов определено отношение порядка (например, больше - меньше). Если каждое непустое подмножество упорядоченного множества содержит первый элемент, то такое множество называется вполне упорядоченным. Типы упорядочения (ординальные числа), соответствующие одному и тому же (бесконечному) кардинальному числу, могут быть различны. Например, пусть даны два по-разному упорядоченных множества натуральных чисел {1,2,3…} и {2,3,4,…,1}. Отвечающие им порядковые типы различны хотя бы потому, что первое из множеств не имеет последнего элемента, а второе имеет. Над ординальными числами можно определить специфическую операцию сложения, которая, однако, не обладает свойством коммутативности, т.е. зависит от порядка слагаемых.

2.2. Протяженность и координаты

Размер тела мы привыкли воспринимать как нечто очевидное, не требующее никакого анализа. Разумеется, большинство тел и систем обладают не одним характерным размером, а многими. Например, объект может иметь форму не сферы, а эллипсоида с различными осями, или не куба, а параллелепипеда и т.п. Сложно организованные системы могут характеризоваться большим спектром или даже иерархией базовых размеров.

И человечество в целом на ранних стадиях развития науки, и каждый ребенок в отдельности, вступающий в мир, склонны представлять себе мир именно как совокупность составляющих его трехмерных физических тел той или иной природы. Часто тела представляются нам сплошными и имеющими четкую границу, иногда – разреженными, содержащими внутренние пустоты и размытые границы. Некоторые объекты скорее можно отнести к системе тел, неподвижных или движущихся (архипелаги островов, планетные и звездные системы, стая рыб), для которых, тем не менее, понятие размера имеет более или менее очевидный смысл.

Однако эта очевидность иногда оказывается кажущейся. Искушенный читатель уже догадался, что речь пойдет о фракталах. Наиболее известный пример “необычного” размера – это длина изрезанной береговой линии. Если

периметр вписанного в круг многоугольника стремится к длине окружности, то длина такой линии при увеличении масштаба анализа, т.е. при учете все более мелких ее изломов, никакого предела не имеет. Более того, если обычная линия является одномерным геометрическим объектом, то размерность такой береговой линии (определенная путем элегантного обобщения понятия обычной размерности) оказывается больше 1, но меньше 2. Это значит, что подобная линия занимает некоторое промежуточное положение между обычной линией и двумерной поверхностью. Излишне и говорить, что математики (да и физики) позаботились об открытии и изучении целого сонма подобных монстров.

Как уже отмечалось, во многих случаях размеры объектов не остаются неизменными, а тем или иным образом эволюционируют во времени. В этом случае описывается и изучается динамика размеров.

Можно ли считать размер первичной, основной пространственной характеристикой объекта? Во многих случаях это, по-видимому, не так. Ведь в действительности любой реальный физический объект составлен из более элементарных частей, каждая из которых характеризуется своим пространственным *местоположением*. Поэтому размер объекта представляет собой разброс (диапазон) положений составляющих тело или систему частей относительно какой-либо выделенной частицы тела. Это соответствует и логическому построению теоретической и аналитической механики – в этой науке все начинается с механики точки, а затем производится переход к механике тел, систем и различных сред. Это соответствует и распространенной среди физиков гипотезе о том, что элементарные частицы являются точечными.

Таким образом, понятие размера удобно определить через более фундаментальное понятие положения в пространстве. Пространственное положение, в свою очередь, в науке (и на практике) задают обычно с помощью некоторой подходящей системы координат. Именно понятие координаты, системы координат стало в науке тем фундаментом, на котором строится все ее величественное здание.

Наиболее знакомым для большинства людей является понятие о прямоугольной системе декартовых координат в евклидовом пространстве, расстояние в котором вычисляется по известной теореме Пифагора. Многие задачи физики, в соответствии со спецификой граничных условий, удобно решать путем преобразования к другим системам координат – косоугольной, сферической, цилиндрической и т.п. В физике уже почти сто лет используются представления об искривленном неевклидовом пространстве, свойства которого позволят описать законы гравитационного и, возможно, электромагнитного полей. Простая топология евклидова пространства также представляет собой сильное искушение для желающих объяснить физические феномены с помощью нарушений этой топологии. От трех пространственных измерений физики уже давно перешли к четырех- и пятимерному пространству, а современные теории материи используют модели с пространствами гораздо более высокой размерности. Эти дополнительные измерения позволяют учесть в теории различные внутренние степени свободы (спин и др.).

К формальному повышению размерности пространства приводит и один весьма общий подход аналитической механики. Согласно ему, вместо описания положения и импульса системы N независимых частиц в общем трехмерном пространстве вводится так называемое фазовое 6N-мерное пространство для единственной изображающей точки. Здесь каждая пара осей служит для указания координаты или импульса соответствующей частицы.

Дальнейшее развитие идеи состояло в том, чтобы вообще использовать в качестве обобщенных координат любой набор параметров, описывающих состояние объекта или системы объектов. Эта идея нашла естественное множество применений при постановке и решении задач вне механики и физики. Примером может служить термодинамика, где в качестве переменных используются температура, давление, объем, энтропия, а также отвечающие им термодинамические потенциалы - энергия, свободная энергия Гельмгольца, тепловая функция, свободная энергия Гиббса.

Другой пример - теория электрических цепей, где составляют и решают системы уравнений, в которых неизвестными обычно являются заряды на обкладках конденсаторов (аналоги “перемещений” частиц) и их производные по времени (аналоги “скоростей” частиц) - токи ветвей. Описание ветви, содержащей конденсатор, индуктивность и резистор, формально полностью совпадает с описанием материальной частицы, движущейся в поле сил трения и упругих сил. Для описания колебательных и переходных процессов в механических системах и электрических цепях фактически применяется один и тот же математический аппарат, и электрические цепи специально используются в качестве аналоговых вычислительных устройств для прямого моделирования механических систем.

Возможно, аналогия между электрическим зарядом и пространственной координатой имеет глубокий смысл. Как известно, итальянский физик Т.Калуза еще в 1919 г. предложил “геометрическое” обоснование электромагнитных явлений, основанное на обобщении 4-мерной (3-мерное пространство + время) общей теории относительности Эйнштейна на 5-мерное пространство. Смысл самой дополнительной координаты не вполне ясен, однако ее производная по (собственному) времени, т.е. соответствующая компонента 5-мерной скорости, может быть интерпретирована как отношение электрического заряда к массе частицы [7].

2.2. Длительность – аналог размера во временной области, измерение длительности аналогично измерению протяженности

Наряду с физически обусловленными пространственными размерами каждая система взаимодействующих элементов обычно обладает также характерными *длительностями*, или *размерами во времени*. Так, своим типичным периодом характеризуются, например, колебания кристаллической решетки, электромагнитное излучение атомов и молекул, пружинный маятник, колебания в механических конструкциях, обращение планет вокруг Солнца, звезд вокруг центра Галактики и т.п.

Протяженность во времени является естественным аналогом протяженности в пространстве. Объективный и устойчивый характер существования собственных длительностей систем позволяет измерять время точно так же, как объективный и устойчивый характер существования собственных размеров тел позволяет измерять пространственную протяженность. В обоих случаях размеры некоторых объектов/процессов принимают в качестве эталонных и путем сравнения находят *численную* меру протяженности/длительности других объектов/процессов. Эталоны длительности принято называть часами, они могут иметь любую физическую природу (механическую, электромагнитную и т.п.).

Здесь важно отметить именно объективную устойчивость существования как пространственных, так и временных размеров. Ведь в действительности время (в отличие от пространства) непрерывно течет, так что любые два "сеанса" сравнения этих размеров в различные моменты времени представляют собой фактически сравнения двух пар различных реализаций объекта. Тем не менее, у человечества (в рамках нерелятивистской теории) существовала подтверждаемая на опыте уверенность в том, что все часы Мира в идеале должны показывать одно и то же время.

2.3. Различия между размером и длительностью почти исчезают в теории относительности

Теория относительности вносит важные изменения в наши представления о временных и пространственных размерах. С одной стороны, она в известной мере вообще устраняет различия между пространственной протяженностью и продолжительностью во времени, с другой – предсказывает различие при измерении одного и того же промежутка пространства или времени между двумя событиями в двух различных системах отсчета. Согласно релятивистским представлениям, пространство и время (и результаты их измерений) не независимы, а объединены в единый 4-мерный континуум. Наибольшую длину тело имеет в той системе отсчета, в которой оно покоится, а его длина, измеренная в движущейся относительно данного тела системе отсчета, окажется меньше (лоренцево сокращение). При этом движущиеся часы всегда идут медленнее неподвижных, т.е. промежуток времени между двумя событиями, измеренный неподвижными часами, будет заведомо наибольшим. Исходя из этих представлений, можно прийти к известному "парадоксу близнецов": если один из близнецов улетит от брата с большой скоростью на космической ракете, то вернувшись (по своим часам) через 20 лет, он застанет его постаревшим лет на 50, а то и больше (тут все будет зависеть от скорости полета).

2.4. Все размерности физических величин могут быть сведены к размерности длины

Все физические величины имеют определенную физическую размерность, т.е. измеряются в соответствующих единицах. Принципиально для каждой физической величины можно выбрать произвольную единицу. Однако можно, используя зависимости между различными физическими величинами, ввести

несколько ***основных*** (независимых) единиц измерения, а для всех остальных величин построить ***производные*** единицы, выраженные через основные.

В качестве основных величин в физике обычно принимают длину, время и массу. Однако для массы с помощью закона тяготения Ньютона (как и для электрического заряда с помощью закона Кулона) можно также вывести производную единицу измерения (она будет равна 15 тонн, если положить гравитационную константу G в законе Ньютона равной 1). Таким образом, теоретически независимыми, как указано в [4], оказываются только единицы измерения длины и времени, т.е. именно единицы протяженности и длительности. В то же время единица измерения времени связана с единицей измерения пространства простым масштабным множителем, равным скорости света c. Поэтому фактически для построения любой физической размерности достаточно единственной и основной физической единицы – единицы измерения ***длины***.

Единицей длины в физике служит метр, который в системе единиц СИ определяется [5] как расстояние, проходимое в вакууме плоской электромагнитной волной за $(299\ 792\ 458)^{-1}$ долей секунды. В астрономии расстояния часто измеряют световыми годами. Световой год – это расстояние, проходимое светом за 1 год ($9{,}46 \times 10^{17}$ см). Расстояние, равное 3,25 световых лет или $3{,}08 \times 10^{18}$ см, называют 1 парсек, т.к. на таком расстоянии диаметр земной орбиты виден под углом в одну секунду.

Время в физике измеряется в секундах. Секунда в системе единиц СИ определяется [5] как 9 192 631 770 периодов излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.

2.5. Диапазоны величин и фундаментальные физические постоянные

Рассмотрим теперь диапазоны реальных значений протяженности, длительности и численности, определяемые ***фундаментальными*** мировыми константами.

За наименьший размер часто принимается так называемая ***планковская длина*** $L_p=(hG/2\pi c^3)^{1/2}$, равная примерно 10^{-33} см. Здесь обозначено: h - постоянная Планка, G - гравитационная постоянная в законе тяготения Ньютона, c - скорость света. В то же время вычисленный по стандартной формуле ***гравитационный радиус электрона*** $r_{Ge} = 2Gm_e/c^2$ (m_e - масса электрона) равен приблизительно 10^{-57} см (но неизвестно, имеет ли физический смысл столь малая величина). В качестве наибольшего размера можно принять, например, ***гравитационный радиус Вселенной*** $R_G = 2GM/c^2$. Через M обозначена масса Вселенной, определяемая через среднюю плотность материи. Численная оценка этого гравитационного радиуса составляет 10^{28} см.

Вполне естественным будет также предположить, что наименьшая и наибольшая длительность могут быть получены делением соответствующих пространственных протяженностей на скорость света. Это с точностью до

порядка составит, соответственно, около 10^{-43} и 10^{18} секунд (до 30 миллиардов лет).

Отсюда, следует, что ***численный*** диапазон (относительных) расстояний и промежутков времени во Вселенной может составить до 10^{61} и даже до 10^{86}. Известны примеры других очень больших “физических” чисел. Так, по оценке Дирака [6], отношение полной массы M Вселенной к массе m_p протона оказывается равным примерно 10^{78}, а отношение электростатической силы взаимодействия к гравитационной в атоме водорода, равное e^2/Gm_pm_e , составляет порядка 10^{39}. Такой же порядок, по его подсчетам, имеет отношение возраста Вселенной к промежутку времени, за который свет проходит сквозь электрон. Интересно отметить, что радиус электрона $r_e = e^2/m_ec^2$, равный примерно 10^{-13} см, определяется при этом из предположения, что вся энергия покоя электрона имеет электромагнитное происхождение (e - заряд электрона). Число протонов в Солнце примерно равно 10^{56}, а число звезд во Вселенной имеет порядок 10^{24} . Отношение размера Вселенной к размеру атома близко к 10^{37}.

Известны и безразмерные константы вполне привычной величины. Так, например, знаменитая постоянная тонкой структуры $\alpha = 2\pi e^2/hc$ равна 1/137. Другая известная константа, равная отношению m_p/m_e массы протона к массе электрона, имеет значение 1840.

С чем связан сам факт наличия ряда универсальных физических констант? Некоторые их них можно исключить изменением масштаба единиц измерения расстояний, времени, массы и электрического заряда. Однако остальные сохранят нетривиальное числовое значение, вызывая наш интерес к причинам этого. Более того, мы пока достоверно не знаем, являются ли они истинными константами или все же меняются со временем, как это предположил Дирак [6]. Моя собственная точка зрения основана на убеждении, что наша Вселенная является специфической частью (черной дырой) более общего Мира, и что значения упомянутых констант связаны с размерами и характеристиками взаимодействия именно этой части. Точно так же связаны между собой размеры и характеристики взаимодействия различных систем и объектов внутри нашей Вселенной.

3. СВЯЗЬ ЧИСЛЕННЫХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК С СИСТЕМНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

3.1. Размеры и принцип причинности

Являются ли численные и пространственно-временные характеристики (и только они) определяющими? Часто нам кажется, что это действительно так. Мы не обращаем внимания на мелкую кочку, но серьезно готовимся к подъему на большую гору. Мы не сожалеем о потерянных секундах, но мечтаем вернуть ушедшие безвозвратно годы. Мы не обращаем внимания на одиночную капельку влаги, но спешим укрыться от сильного дождя. С другой стороны, небольшого размера алмаз может представлять для нас несравнимо большую ценность, чем огромный булыжник, а радикальные перемены в судьбе могут произойти в считанные секунды после многих лет плавного и неизменного

течения жизни. Одинокий мыслитель, подобный Ньютону или Эйнштейну, зачастую вносит в науку вклад неизмеримо больший, чем заурядный (хотя и многочисленный) научный коллектив.

Во многих случаях мы склонны считать, что численность, протяженность и длительность, характеризующие те или иные объекты, системы и их совокупности, являются случайными и никак не связаны с другими характеристиками. Так ли это? Для очень широкого класса систем, где имеется внутрисистемное взаимодействие и/или взаимодействие между данной системой и внешней (включающей данную) системой, и где это взаимодействие имело достаточно времени, чтобы проявить себя, не только можно констатировать наличие связи между размерами и характеристиками взаимодействия, но именно качественное и количественное описание этой связи и является обычно предметом научного изучения. Это справедливо как для систем "естественного" происхождения, так и для объектов и систем, связанных с деятельностью человека. В последнем случае связи между численностью, размерами и длительностями и функциональными характеристиками, как правило, еще более очевидны. Даже размеры куска торта, отрезанного, казалось бы, наугад, соответствуют интуитивным представлениям хозяйки дома о возможности гостя съесть его.

Для всех систем, реально существующих в нашей Вселенной, справедлив, как показывает опыт, принцип причинности. В своей качественной формулировке он утверждает, что так или иначе любая ситуация обусловлена набором так называемых причин, которые во времени предшествуют этой ситуации. Согласно более сильной формулировке знание этих определяющих факторов позволяет в принципе количественно рассчитать параметры, описывающие рассматриваемое следствие этих факторов. Но это как раз и означает, что рассматривая (обобщенный) размер как диапазон изменения (обобщенных) координат частей, образующих данную систему, мы всегда можем рассчитывать на установление хорошо определяемой связи между этим размером и характеристиками внутрисистемного и/или метасистемного взаимодействия.

3.2. Примеры физических систем

Сказанное справедливо, прежде всего, для физических систем (мы пока не будем рассматривать квантовомеханические объекты). Теоретический анализ дюбого физического объекта, рассматриваемого в качестве элементарного, имеет своей целью выразить связь между его "координатами" (в общепринятом или обобщенном смысле) и характеристиками его взаимодействия с другими элементами Вселенной.

В теоретической физике сформулировано фундаментальное положение о существовании для каждой физической системы определенной величины, именуемой *действием* и обозначаемой буквой S. В свою очередь, действие представляет собой интеграл по времени от функции Лагранжа L. Последняя в общем случае является функцией пространственных координат системы и времени, а также зависит от некоторых специфических для конкретной системы параметров λ, т. е. $S = S\ (x, y, z, t, \lambda)$. В роли характеристик взаимодействия в

механике, как правило, выступают такие величины, как *энергия* и *импульс,* а также *момент импульса*, поскольку эти величины для замкнутых (изолированных) систем сохраняются. Компоненты импульса *P* системы представляют собой частные производные от действия по соответствующим пространственным координатам, энергия *H* системы (с точностью до знака) равна частной производной от действия по времени. Описание же реальных физических систем базируется на том, что для каждой их них справедливо функциональное уравнение (принцип стационарного действия), устанавливающее строгую связь между значениями координат (и диапазонами их изменения, т. е. размерами) с одной стороны и значениями характеристик взаимодействия – с другой.

Поскольку вид функции Лагранжа для конкретных частиц и классов ситуаций раз и навсегда установлен, постольку математический аппарат с необходимостью отражает незыблемый факт – каждый физический процесс (вне квантовомеханического рассмотрения) является строго детерминированным, он развивается однозначным образом и зависит лишь от начальных условий (начальных значений координат и их первых производных по времени). Именно это является содержанием “физического” варианта принципа причинности, который жестко исключает произвол в движении макрочастиц и, как следствие, определяет характерные размеры и длительности процессов в системах. Множество иллюстраций этого общего положения легко почерпнуть из различных разделов физики.

Так, при *орбитальном движении* малого тела относительно центрального массивного тела по закону тяготения Ньютона (Кеплерово движение) радиус орбиты и период обращения зависят от массы тел и полной энергии обращающегося тела. Размеры *твердого* кристаллического тела в конечном счете определяются числом атомов и размером элементарной кристаллической решетки, который зависит от взаимодействия между атомами. В идеальном *газе* средняя длина свободного пробега молекулы в газе определяется концентрацией молекул. Объем, занимаемый газом, хотя и задается конфигурацией ограничивающих стенок, однозначным образом связан с концентрацией молекул, температурой, давлением газа. Наконец, среднее число соударений в единицу времени (мера инерционности) определяется концентрацией молекул, температурой, массой молекулы. В различных (в том числе *жидких*) средах большое значение имеют процессы диффузии и термодиффузии. Для таких задач свойствами взаимодействия в среде определяются диффузионная длина и постоянная времени диффузионного выравнивания.

Наряду с приведенными примерами, в которых характерные протяженности и длительности определяются *внутрисистемными* свойствами и взаимодействиями, нетрудно привести примеры, в которых размеры и постоянные времени задаются граничными (т.е. *внешними* по отношению к объекту) условиями. Например, любая физически возможная в некотором резонаторе длина волны всегда равна целочисленной доле по отношению к длине основной основной волны, равной размеру резонатора (т.е. размер резонатора всегда кратен длине волны). Соответственно и численность возможных мод колебаний ограничена наибольшей возможной длины волны. Частоты возможных колебаний также ограничены соответствующим образом,

поскольку связаны с длиной волны (хотя зависят и от скорости распространения волны в конкретной среде резонатора).

3.3. О квантовомеханических системах

Квантовая механика внесла существенные коррективы в понимание физиками причинности, возникло представление о квантовом индетерминизме. Пользуясь аналогией с общественными структурами, можно сравнить переход от классической причинности к квантовой с переходом от жестко тоталитарного государства (в котором все регламентировано) к демократическому устройству, где правила игры гораздо “мягче”, предполагают многовариантность, но вовсе не сводятся к полному отсутствию законов и беспределу. Хотя эта аналогия весьма условна, она отражает тот факт, что и физика после квантовой революции, и государство после социальной революции в целом сохраняют свойство предсказуемости и высокую внутреннюю логичность и структурированность.

Квантовый индетерминизм проистекает из присущих материи волновых свойств. Именно ими, прежде всего, обусловлено знаменитое соотношение неопределенностей Гейзенберга, не позволяющее одновременно измерить импульс и координату частицы или ее энергию и интервал времени. Не менее фундаментальным следствием этого оказывается тот факт, что квантовомеханическое описание будущего определяется теперь уравнением 1-го (а не 2-го, как в неквантовой физике) порядка по времени. Это уравнение – уравнение Шредингера - записывается теперь не для координат как функций времени, а для волновой функции (или комплекса функций), зависящей и от координат, и от времени, подобно полевым функциям классической теории поля. Задаваться должны теперь только начальные и граничные условия для самой функции, либо для ее производных, но не те и другие одновременно.

Напомним, что применительно к доквантовой механике нашей целью было установление связи между координатами (и размерами) объектов с характеристиками взаимодействия (импульсами, энергией). В квантовой же теории постановка задачи меняется, теперь нужно говорить об установлении связи между видом волновой функции с одной стороны и набором определяющих параметров с другой стороны. В качестве определяющих параметров могут выступать координаты (координатное представление) либо импульсы (импульсное представление).

Вид волновой функции – это ее характеристики и пространственно-временное поведение. Например, каждой свободно движущейся материальной частице в квантовой физике ставится в соответствие связанная с этой частицей волна де Бройля, которая характеризуется длиной волны и периодом. Естественноым образом длина волны и период выражаются через энергию и импульс частицы. Если область движения ограничена (частица в бесконечно глубокой потенциальной яме), волновая функция попрежнему является гармонической, но, во-первых, определена только в пределах данной области, а главное – длина волны должна укладываться целое число раз внутри области. Иными словами, возникает бесконечный дискретный ряд возможных состояний (волновых функций). В более сложных случаях волновая функция перестает

быть гармонической, т.е. ее форма усложняется по отношению к простой синусоиде, однако сохраняет смысл некоторый размерный параметр, выраженный через энергию, массу частицы и постоянную Планка, который в простых случаях совпадал с длиной волны.

Квантовомеханическое описание применимо не только к частицам, но и к полям. В случае электромагнитного поля длина волны и частота фотонов также выражаются через энергию и импульс волны, хотя непосредственного аналога для массы частицы в случае волны не существует.

3.4. Пример нефизической системы

Разумеется, связь между размерами и характеристиками взаимодействия существует повсеместно, не только в физике, но и в любой другой научной области – химии, биологии, геологии, общественных и прикладных науках. Ограничимся единственным примером, связанным с моделями эволюции численности популяций. Эта численность легко интерпретируется именно как размер популяции, а в качестве характеристик взаимодействия фигурируют различные и хорошо определенные благоприятные и неблагоприятные факторы – запасы и темпы воспроизводства пищи, естественная гибель, темпы размножения, конкуренция, хищные враги популяции и т.п. В современной науке построено и проанализировано огромное количество различных эволюционных схем гибели и размножения, от простейших до моделей с исключительно сложной динамикой. Однако все эти модели в конечном счете решают именно вышеуказанную задачу – устанавливают связь между размером системы, временными параметрами ее эволюции с одной стороны и характеристиками взаимодействия в системе – с другой стороны.

3.5. Апериодические и периодические процессы

Большое число примеров, в которых размеры и длительности связаны с характеристиками взаимодействий, предоставляет теория колебаний – механических, акустических, тепловых, электрических и электромагнитных и т.д. В общем случае описываемые ей процессы могут быть сколь угодно сложными. Малые колебания, как правило, описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, решения которых всегда выражаются через экспоненциальную, степенную и тригонометрические функции времени.

Здесь необходимо сделать очень важное замечание. Законы физики отводят пространственным и временной координатам в высшей степени несимметричные роли. Это проявляется уже в фундаментальном разичии понятий “объект” и “процесс”. Переход наблюдателя от одной пространственной точки к другой, вообще говоря, является абсолютно обратимым и представляет собой внутреннее дело наблюдателя, он не влияет на свойства изучаемого объекта. Время, в отличие от пространственных координат, обладает универсальным свойством непрерывного и необратимого течения. Все объекты во Вселенной в той или иной мере синхронно “смещаются” во времени, и никакой наблюдатель не может составить здесь исключения. Законы физики и большинства других наук являются

динамическими законами, т.е. описывают объективную эволюцию объектов во времени (процессы). Поэтому особое значение имеют задачи, в которых характеристики взаимодействия или иные параметры зависят от времени. В сущности, прочие задачи, в которых формальная зависимость от времени отсутствует, неявно представляют собой просто предельные случаи установившейся или почти установившейся ситуации.

Для линейной колебательной системы с N степенями свободы в общем случае характерно наличие того же числа собственных постоянных времени, определяющих эти колебания. Часть из них отвечает апериодическим (т.е. монотонно изменяющимся во времени) процессам необратимого рассеяния энергии, если таковые процессы в системе происходят. Другая часть отвечает периодическим (повторяющимся) процессам, при которых кинетическая энергия переходит в потенциальную, а затем происходит обратный переход, и т.д.

Интересно, что в подобных задачах период колебаний иногда зависит только от индивидуальных свойств колебательной системы, а пространственные размеры (амплитуда колебаний) – еще и от энергии системы, которая может варьироваться для одной и той же системы. Например, для простейшего (пружинного) механического осциллятора частота колебаний определяется отношением жесткости к массе, а амплитуда колебаний зависит от жесткости и суммы потенциальной и кинетической энергии (эта сумма со временем не меняется). Для простейшего электрического осциллятора, содержащего катушку индуктивности и конденсатор, период колебаний определяется квадратным корнем из произведения индуктивности катушки на емкость конденсатора. Роль “обобщенной” координаты в этих колебаниях играет величина заряда на обкладках конденсатора, амплитуда колебаний заряда также зависит от (постоянной по величине) суммарной энергии в цепи. Независимость периода колебаний от начальных условий, определяющих запас энергии, позволяет в “массовом порядке” использовать такие системы в качестве часов, т.е. эталонных образцов длительности.

Условием независимости периода колебаний от энергии (начальных условий) является отсутствие соответствующей зависимости в выражении для (обобщенной) силы в уравнении осциллятора. В линейном осцилляторе восстанавливающая сила пропорциональна текущему смещению от положения равновесия, причем коэффициент пропорциональности - константа. А вот в задаче Кеплера о вращении малого тела вокруг массивного центрального тела проекция силы на любую из осей в плоскости орбиты связана со смещением вдоль оси коэффициентом, величина которого обратно пропорциональна кубу радиуса орбиты, а этот последний зависит от начальных условий!

Отметим, что различные составные элементы колебательных систем, с математической точки зрения осуществляют такие операции, как дифференцирование и интегрирование параметров процесса по времени, и могут быть специально использованы для конструирования систем с теми или иными временными характеристиками. Эта проблематика представляет собой содержание такой прикладной науки, как теория автоматического регулирования.

3.6. Поглощение и выделение энергии в линейных колебательных системах возможны только при наличии апериодических постоянных времени. Устойчивость.

Как уже было отмечено, необратимое рассеяние внутренней энергии в линейных колебательных системах обязательно связано с апериодическими процессами (речь идет именно о внутренней энергии, т.к. рассеяние энергии, поступающей от внешнего источника, вполне может происходить и по гармоническому закону, как, например, на резисторе в цепи переменного тока). Это значит, что интенсивность рассеяния энергии тем меньше, чем больше ее уже потеряно системой. Такие процессы всегда можно проиллюстрировать в рамках диффузионной модели, при которой имеет место своеобразный процесс диффузии энергии из области большей ее концентрации в область с меньшей концентрацией. Теми же аргументами объясняется и экспоненциальное распределение по энергиям самых различных физических систем.

С другой стороны, если в колебательных системах происходит поглощение энергии, то и оно происходит по апериодическому закону. Примером может служить поступление энергии в систему извне при параметрическом резонансе, когда сами параметры колебательной системы меняются с периодом, согласованным с периодом колебаний (например, когда человек на качелях в такт колебаниям то приседает, то поднимается, изменяя положение центра тяжести и тем самым раскачивая их [4]). Математически это описывается уравнением, эквивалентным уравнению для затухания энергии, но с константой противоположного знака, т.е. производная энергии по времени оказывается теперь положительной, а не отрицательной.

Наличие апериодических решений в характеристическом уравнении системы, рассеяние или поглощение системой энергии очевидным образом связано с ее устойчивостью. Как известно, математическая теория устойчивости берет свое начало в теории показателей Ляпунова, который именно со знаком апериодических постоянных времени связывал достаточные условия для определения того, устойчива ли соответствующая система или нет.

Промежуточным (и очень важным) случаем между периодическим и апериодическим решениями оказывается резонансное решение, связанное с близостью значений сразу нескольких постоянных времени. Если в системе производная энергии по времени равна нулю, резонанс особо не проявляет себя. Если же в системе указанная производная отлична от нуля, то при резонансе процессы обмена энергии с внешней средой приобретают ярко выраженный характер.

Таким образом, предположение о независимости различных степеней свободы в автономной колебательной системе с затуханием в действительности носит ограниченный характер, поскольку не выполняется в резонансной области, при совпадении временных характеристик. В частности, такая резонансная связь обязательно должна учитываться при решении задач статистической физики, где предположение о независимости обычно играет

существенную роль. Дело в том, что физически затухание связано с выводом (диссипацией) энергии из системы; эта энергия из упорядоченной формы, отвечающей колебательному процессу, обычно переходит в тепловую форму, связанную, в том числе, с (хаотическим) излучением и поглощением фотонов и неупорядоченным движением в той же системе, что в конечном счете приводит к возрастанию в ней энтропии.

В завершение рискну высказать спорную мысль. До недавнего времени я был склонен думать, что резонас - это характерное явление, связанное именно со временем, и что сопадение пространственных размеров или численности, характеризующей те или иные свойства нескольких объектов, не может быть связано ни с какими похожими эффектами. Однако теперь я считаю такое мнение ошибочным. Характерным примером являются *фрактальные* границы трех пересекающихся круговых областей на комплексной плоскости – аттракторов итеративных решений кубичного уравнения [8]. Каждая точка на изображающей плоскости ставится (процедурой итерации) в соответствие одному из корней уравнения, и фрактальность возникает *именно там, где точки равноудалены от корней*.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Гельфер Я.М., Любошиц В.Л., Подгорецкий М.И.** *Парадокс Гиббса и тождественность частиц в квантовой механике*. Москва, Наука, 1975.
2. **Мантуров О.В., Солнцев Ю.К., Соркин Ю.И., Федин Н.Г.** *Толковый словарь математических терминов.* Москва, Просвещение, 1965.
3. **Александров П.С., Колмогоров А.Н.** *Введение в общую теорию множеств и функций.* Москва, Гостехиздат, 1948.
4. **Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М.** *Курс общей физики. Механика и молекулярная физика.* Москва, Наука, 1965.
5. **Кабардин О.Ф.** *Физика. Справочные материалы*. Москва, Просвещение, 1985.
6. **Дирак П.А.М..** *Пути физики*. Москва, Энергоатомиздат, 1983.
7. **Владимиров Ю.С.** *Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 2. Теория физических взаимодействий*. Москва, Издательство МГУ, 1998.
8. **Шредер М.** *Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая.* Москва-Ижевск, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001.