РОЖДЕНИЕ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Содержание

1. Введение

Гениальный русский математик Николай Иванович Лобачевский родился в 1792 г. С 1814 г. по 1855 г. работал в Казанском университете. В 1820 г. впервые был избран деканом физико-математического факультета, в 1845 г. стал ректором. Умер Н.И. Лобачевский в 1856 г.

В 1826 г. Лобачевский сделал на заседании физико-математического факультета доклад с изложением начал неевклидовой геометрии. Ни доклад, ни последующие публикации не были поняты современниками. При жизни подавляющее большинство коллег считали его сумасшедшим только за то, что он посмел подвергнуть сомнению пятый постулат Евклида (о параллельных прямых).

Ниже приведены очень поучительные выдержки из прекрасно написанной Михаилом Сергеевичем Колесниковым книги “Лобачевский” (Москва, изд-во “Молодая гвардия”, серия ЖЗЛ, 1965 г.).

2. Лобачевский и Остроградский

… Секретарь академии Фусс передал мемуар Лобачевского Остроградскому. Михаил Васильевич Остроградский уже сделался первой математической величиной, ординарным академиком. Его математическая звезда пылала ослепительным светом. Все поняли и в отечестве и за границей: в науке пришел гений! Ему суждено стать основоположников аналитической механики, одним из создателей русской математической школы. Его выдающиеся заслуги будут признаны всем ученым миром. Он испьет чашу славы до конца еще при жизни. Его назовут «корифеем механики и математики». Член Американской, Туринской, Римской, Парижской академий... Все высшие учебные заведения будут считать большой честью залучить его к себе в профессора. Слова «Становись Остроградским!» сделаются девизом молодежи,

Когда Михаилу Васильевичу положили на стол мемуар Лобачевского, математик содрогнулся.

— Опять Лобачевский!

Дело в том, что в Петербурге проживал еще один математик Лобачевский, дальний родственник Николая Ивановича. Этот петербургский Лобачевский, Иван Васильевич, был одержим идеей о квадратуре круга и надоедал Остроградскому. В столе у Остроградского лежала работа Ивана Васильевича «Геометрическая программа, содержащая ключ к квадратуре неравных луночек (3:4) (1: 4} и сегмента в составе полуразности оных находящегося».

Развернув мемуар «О началах геометрии» казанского Лобачевского, Остроградский ужаснулся. Что . за бред?! Этому Лобачевскому мало квадратуры круга, теперь он занялся теорией параллельных! Изобрел новую геометрию — воображаемую!.. Тяжело иметь дело с сумасшедшими...

Михаил Васильевич написал размашисто: «Сей Лобачевский недурной математик, но если надобно показать ухо, то он показывает его сзади, а не спереди».

Фусс любезно объяснил академику Остроградскому, что этот Лобачевский вовсе не тот Лобачевский, а ректор Казанского университета.

— Тогда другое дело, — сказал Михаил Васильевич и написал:

«Автор, по-видимому, задался целью написать таким образом, чтобы его нельзя было понять. Он достиг этой цели; большая часть книги осталась столь же неизвестной для меня, как если бы я никогда не видел ее...»

Гениальности Остроградского не хватило на то, чтобы разобраться в открытии казанского геометра. Мемуар «О началах геометрии» вызвал у Михаила Васильевича приступ злобы. И подобный человек занимает место ректора!.. Разоблачить! Дабы своийи химерами не развращал молодежь... Приняв такое решение, Остроградский сделался на всю жизнь тайным заклятым врагом Лобачевского. Даже десять лет спустя, когда Михаилу Васильевичу вновь дадут на отзыв новую работу Лобачевского, он скажет:

«Можно превзойти самого себя и прочесть плохо средактированный мемуар, если затрата времени искупится познанием новых истин, но более тяжело расшифровывать рукопись, которая их не содержит и которая трудна не возвышенностью идей, а причудливым оборотом предложений, недостатками в ходе рассуждений и нарочито применяемыми странностями. Эта последняя черта присуща рукописи господина Лобачевского... Нам кажется, что мемуар господина Лобачевского о сходимости рядов не заслуживает одобрения Академии».

Здесь все поставлено с ног на голову. Возвышенность идей, новые истины, безукоризненный ход рассуждений...

Не зависть, а откровенное непонимание — вот что это было такое! Даже когда Лобачевский, разыскав в пыльных шкафах рукопись своего учебника «Алгебра», наконец, опубликовал его, Остроградский, перелистав учебник, воскликнул: «Гора родила мышь!»

А Николай Иванович так и не узнал ничего: секретарь Фусс не захотел огорчать ректора Казанского университета, к которому благоволит сам царь,— отзыва на свои работы Николай Иванович не дождался.

Что ж... Не привыкать!

Остроградский решил раздеть Лобачевского «догола», скомпрометировать перед общественностью.

Сама мысль, что воспитанием молодежи руководит маньяк, была Остроградскому невыносима.

Он вызвал двух проходимцев, которых по недоразумению считал своими друзьями, — С. А. Бурачека и С. И. Зеленого. Бурачек и Зеленый преподавали в офицерских классах Морского кадетского корпуса, где читал лекции также и Остроградский. Кроме того, Бурачек значился сотрудником журнала «Сын отечества». Редакторы этого журнала Греч и Булгарин были тесно связаны с Третьим отделением, и всякая рецензия в «Сыне отечества» рассматривалась как политический донос.

Остроградский решил «выдать с головой» Лобачевского. Гречу и Булгарину. Царь, во всяком случае, журнал читает, обратит внимание, кому доверено руководство Казанским университетом.

— Пишите! — коротко приказал Остроградский.

… Лобачевский открыл заложенную страницу — и не поверил глазам: «Есть люди, которые, прочитав иногда одну книгу, говорят: она слишком проста, слишком обыкновение, в ней не чем и подумать. Таким любителям думанья советую прочесть геометрию Лобачевского. Вот уж подлинно есть о чем подумать. Многие из первоклассных этих математиков (намек на Остроградского!) читали ее, думали и ничего не поняли... Даже трудно было бы понять и то, каким образом г. Лобачевский из самой легкой и самой ясной в математике, какова геометрия, мог сделать такое тяжелое, такое темное и непроницаемое учение, если бы сам он отчасти не надоумил нас, сказав, что его Геометрия отлична от употребительной, которой все мы учились и которой, вероятно, уже разучиться не можем, а есть только воображаемая. Да, теперь все очень понятно. Чего не может представить воображение, особливо живое и вместе уродливое! Почему не вообразить, 'например, черное — белым, круглое —четырехугольным, сумма всех углов в прямолинейном треугольнике меньше двух прямых и один и тот же определенный интеграл равным то π/4, то ∞? Очень, очень сложно, хотя для разума все это и непонятно. Но спросят: для чего же писать, да еще и печатать такие нелепые фантазии? Признаюсь, на этот вопрос (отвечать трудно... При том же, да позволено нам будет несколько коснуться личности. Как можно подумать, чтобы г. Лобачевский, ординарный профессор математики, написал с какой-нибудь серьезной целью книгу, которая немного принесла бы чести и последнему приходскому учителю? Если не ученость, то по крайней мере здравый смысл должен иметь каждый учитель, а в новой Геометрии нередко недостает и сего последнего. Соображая все сие, с большой вероятностью заключаю, что истинная цель, для которой г. Лобачевский сочинил и издал свою Геометрию, есть просто шутка, или, лучше, сатира на ученых математиков, а может быть, и вообще на ученых сочинителей настоящего времени... Хвала г. Лобачевскому, принявшему на себя труд объяснить, с одной стороны, наглость и бесстыдство ложных новоизобретателей, а с другой стороны, простодушное невежество почитателей их новоизобретений.

Но, сознавая всю цену сочинения г. Лобачевского, я не могу, однако ж, не пенять ему за то, что он. не дав своей книге надлежащего заглавия, заставил нас долго думать понапрасну. Почему бы вместо заглавия «О началах геометрии» не написать, например, сатира на геометрию, карикатура на геометрию или что-нибудь подобное?.. Теперь же я думаю и даже уверен, что почтенный автор почтет себе весьма мне обязанным за то, что я показал истинную точку зрения, с которой должно смотреть на его сочинение. С. С.».

Авторы трусливо скрыли свои фамилии, подписавшись инициалами «С. С.». Булгарин и Греч не пожалели в своих журналах места на пасквильную рецензию. Объемная статья с большими выдержками из мемуара «О началах геометрии».

Лобачевский долго сидел в горестной задумчивости. Булгарину и Гречу есть дело до всего: не только до литературы, но и до геометрии. Кто бы ни скрывался под псевдонимом «С. С.», чувствуется, что этот человек внимательно прочитал мемуар. Но почему такая дикая злоба? Кто он? Математик — это несомненно. Почему не захотел понять? Или просто не пожелал принять... Ясно одно: главная цель «С. С.» — повлиять на публику, принизить, осмеять казанского геометра, выставить его чуть ли не сумасшедшим.

Ему почему-то пришли на ум слова Ньютона: «Гений есть терпение мысли, сосредоточенной в известном направлении»…

3. Гаусс, Лобачевский и Янош Больяй

В Геттингене, укрывшись от людей в астрономической башне, живет равнодушный ко всему, кроме своих формул, «король математиков» Гаусс. Этому «королю» нет никакого дела до «подданных». Он не читает лекций, не несет никаких административных обязанностей. Больше всего он ценит покой. Революции, войны, крушения империй... Время проносится под куполом башни. Старый Гаусс ведет размеренный образ жизни. Он исключил из обихода все, что может волновать человека. Политике вход в обсерваторию строго воспрещен. Даже в письмах. Но от людских страстей трудно спрятаться. Башня с куполом напоминает осажденную крепость. И математики, и дилетанты, и просто приезжие иностранцы — каждый стремится засвидетельствовать свое почтение «королю». Особенно много приходит писем. Гаусс их никогда не читает. Он дорожит временем. И начинающие и маститые математики, геодезисты, физики присылают ему на отзыв свои работы. Гаусс, не распечатывая, отсылает их обратно. «Колоссу» все-таки следовало бы быть повнимательнее к людям. Не оттолкнул ли ты будущего гения, которого лишь ты один во всем мире мог поддержать? Но разве то, чего достиг Гаусс, не вершина человеческой мысли? Он создал теорию чисел и навсегда определил все ее дальнейшее развитие; он разработал теорию поверхностей, ввел понятие о полной кривизне и теорему о том, что полная кривизна не изменяется при изгибании поверхности; он доказал основную теорему алгебры; он... Впрочем, все сделанное им трудно охватить разумом. Он «король математики» — «принцепс математикорум», а не «король математиков», как его иногда называют. Его упрекают в равнодушии к ученикам. Только ли к ученикам? Он так же равнодушен и к своей особе: он, например, не может перечислить свои собственные чины и награды. У «короля математики» имеется возлюбленная: «царица математики», как он ее называет, — теория чисел.

Но у него есть свое честолюбие: быть всегда первооткрывателем! Вот почему он возвращает работы, не распечатывая, не давая отзывов. Ведь может случиться и так: то, над чем сейчас трудится Гаусс, уже открыто другим. И вот тот, другой, вправе будет обвинить Гаусса в плагиате. Сколько раз ему приходилось бросать уже начатое дело! Однажды старый приятель Шумахер подсунул статью Якоби. Результаты Я«оби оказались совершенно верны, но вся беда в том, что они вытекали из результатов, ранее полученных самим Гауссом. «Колосс» обругал Шумахера и запретил присылать на отзыв чужие мемуары. «Результаты Якоби представляют часть моей собственной большой работы, которую я собираюсь когда-нибудь издать... Вот почему я бы не хотел дать повод обвинить меня в том, что я воспользовался для своей работы сведениями, полученными частным образом». Успехи младших братьев не радовали «колосса». В математике он был законченным эгоистом. Потом появился гениальный норвежский математик, совсем еще мальчик, Абель. Ему-то, больному, почти нищему, особенно нужна была поддержка Гаусса. Но Абель, оказывается, решил проблему, над которой просиживал ночи Гаусс. «Поскольку Абель продемонстрировал такую проницательность и такое изящество в вопросах изложения, я чувствую, что могу совершенно отказаться от опубликования полученных мной результатов». Так и не дождавшись поддержки со стороны «геттингенского колосса», Абель умер от чахотки на двадцать седьмом году жизни, И только после Гаусс мог сказать:

—.Это большая потеря для науки. Если где-нибудь будет опубликована биография этого в высшей степени замечательного человека, дайте мне знать. Мне также хотелось бы иметь портрет Абеля. В свое время я говорил о нем с Гумбольдтом, который очень хотел пригласить его в Берлин.

Больше всего раздосадовали затворника Гаусса письма давнего друга — венгерского математика Фаркаша Больяй. Было время, когда здесь, в Геттингене, студенты Фаркаш и Гаусс принесли взаимную клятву в вечной дружбе; вместе пытались доказать пятый постулат Эвклида. Потом Фаркащ вернулся в Венгрию, женился. А когда подрос его сын Янош, решил потревожить Гаусса. На первое письмо венгра Гаусс не ответил. Отец и сын — Фаркаш и Янош — рассчитывали на помощь «геттингенского колосса», мечтали о том, чтобы высокоодаренный Янош продолжил свое образование под руководством Гаусса. «Колосс» не пожелал отвечать и :на второе письмо: ему вовсе не хотелось возиться с сыном человека, которого он успел забыть. Пришлось Яношу податься в военно-инженерную академию. Потом младшего лейтенанта Яноша Больяя командировали в небольшую крепость, где он от жестокой скуки занялся теорией параллельных линий. Он задумал доказать пятый постулат и посрамить математика-отца, который всю жизнь бился над этой проблемой. Когда Фаркаш узнал об увлечении сына теорией параллельных, он пришел в отчаяние. «Молю тебя, не делай только и ты попыток одолеть теорию параллельных линий; ты затратишь на это все свое время, а предложения этого вы не докажете все вместе. Не пытайся одолеть теорию параллельных линий ни тем способом, который ты сообщаешь мне, ни каким-либо другим, — писал Фаркаш сыну. — Я изучил все пути до конца... Ради бога, молю тебя, оставь эту материю, страшись ее не меньше, нежели чувственных увлечений, потому что и она может лишить тебя всего твоего времени, здоровья, покоя, всего счастья твоей жизни. Этот беспросветный мрак может потопить тысячи ньютоновских башен. Он никогда не прояснится на земле, и никогда несчастный род человеческий не будет владеть чем-либо совершенным даже в геометрии. Это большая и вечная рана.в моей душе».

Письмо звучит как заклятие. Старый Фаркаш не разглядел в собственном сыне гения. А Янош Больяй был гением и шел путями гениев. Над теорией параллельных он трудился около десяти лет. Придя к мысли о недоказуемости пятого постулата, он стал на тот же путь, что и Лобачевский: решил создать неэвклидову геометрию.

Военная служба тяготила Яноша. Он сделался мрачным, раздражительным. Участились ссоры с товарищами. Однажды он разругался со всеми, и его в один день вызвали на дуэль двенадцать офицеров. Все вызовы Больяй принял. Лишь с тем условием, чтобы после каждого поединка ему разрешили немного поиграть на любимой скрипке.

Таков был человек, который, не подозревая о работах казанского геометра, в 1832 году выпустил в свет свое сочинение «Аппендикс», где излагались элементарные начала неэвклидовой геометрии. «Аппендикс» вышел не отдельным изданием, а как приложение к курсу математики Фаркаша Больяя.

А в 1826 году Лобачевский сделал доклад, содержавший изложение основ неэвклидовой геометрии; в 1829 году опубликовал мемуар «О началах Геометрии»; затем появились другие работы — «Воображаемая Геометрия», «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам», то есть это был целый комплекс фундаментальных исследований. За десять лет Лобачевский создал новую науку, стал основоположником, провозвестником небывалого учения. Кроме того, «Воображаемую Геометрию» он послал во французский журнал, где она была опубликована в 1837 году; в 1840 году в Берлине отдельной брошюрой на немецком языке вышли «Геометрические исследования по теории параллельных линий» Лобачевского — наиболее популярное изложение идей неэвклидовой геометрии.

Маленькое сочинение Яноша Больяя «Аппендикс», что значит «Приложение», разумеется, не может идти ии в какое сравнение с трудами Лобачевского.

Но гений остается гением. У мыслей своя единица измерения — глубина. И хотя Я«ош Больяй сделал всего лишь первые элементарные шаги в новой науке, он может по праву считаться одним из создателей неэвклидовой геометрии.

Он как-то сказал: «Многие идеи как бы имеют свою эпоху, во время которой они открываются одновременно в различных местах подобно тому, как фиалки весной произрастают всюду, где светит солнце». Эти слова целиком можно отнести к идеям неэвклидовой геометрии.

В том-то и дело, что неэвклидова геометрия выросла не на голом месте. Сам ход развития естествознания неизбежно подводил к ее открытию. Интерес к теории параллельных со временем не угасал, а, наоборот, увеличивался. Не проходило и года, в который не появилось бы несколько сочинений, посвященных доказательству пятого постулата.

Саккери, Ламберт, Бошкович, Швейкарт, Тауринус, де Тилли, Вахтер — все они еще до Лобачевского и Больяя смутно сознавали идеи новой геометрии. Но нужен был именно гениальный ум, который превратил бы догадки, предвосхищения, допущения в строгую науку, в вершину завоеваний человеческой мысли.

Был еще один, кто сделал первые шаги на пути создания неэвклидовой геометрии: Гаусс! Именно он назвал новую геометрическую систему «неэвклидовой».

Вот почему, когда Янош Больяй послал Fауссу оттиск своего «Аппендикса», «геттингенский колосс» наконец-то отозвался. Он писал Фаркашу Больяю: «Теперь кое-что о работе твоего сына. Если я начну с того, что я ее не должен хвалить, то на мгновение ты поразишься, но я не могу поступить иначе: хвалить ее — значило бы хвалить самого себя, ибо все содержание этой работы, путь, по которому твой сын пошел, и результаты, которые он получил, почти сплошь совпадают с моими, которые я частично получил уже тридцать — тридцать пять лет тому назад. Я действительно этим крайне поражен.

Я имел намерение о своей собственной работе, кое-что из которой я теперь нанес на бумагу, при жизни ничего не публиковать. Большинство людей совершенно не имеет правильного понятия о том, о чем здесь идет речь; я встретил только очень немногих людей, которые с особенным интересом восприняли то, что я им об этом сообщил... Но я имел намерение со временем нанести на бумагу все, чтобы эти мысли по крайней мере не погибли со мной.

Я поэтому очень поражен тем, что я освобожден от этой необходимости, и меня очень радует, что именно сын моего старого друга таким удивительным образом меня предвосхитил».

Лавры первооткрывателя опять уплыли из рук «короля математики».

Спрашивается: если Гаусс уже до этого трудился над новой геометрией, то почему в таком случае не сделал достоянием гласности свои результаты?

— Я боюсь криков «беотийцев»! — заявил он ближайшим друзьям.

Еще в 1829 году он писал Бесселю: «Вероятно, я еще не скоро смогу обработать свои пространные исследования по этому вопросу, чтобы их можно было опубликовать. Возможно даже, что я не решусь на это во всю свою жизнь, потому что я боюсь крика «беотийцев», который поднимется, когда я выскажу свои воззрения».

Другого приятеля, сомневавшегося в справедливости пятого постулата, он предупреждал:

— Я очень рад, что вы имеете мужество высказаться так, как будто вы признаете возможным, что наша теория параллельных линий, а следовательно, и вся наша геометрия ложны. Но осы, гнездо которых вы разрушаете, подымутся над вашей головой!

«Геттингенский колосс» трусил. Он оберегал свою репутацию «короля» и побаивался сумасшедшего дома. Чего доброго, объявят свихнувшимся!

Gо всеми, кто трудился над теорией параллельных, он безжалостно порывал связи; от посвященных в его сокровенные мысли требовал сохранения тайны.

«Колосс» всегда дерзал в рамках дозволенного. Роль ниспровергателя его страшила. Он хотел оставаться респектабельным во всех случаях. Сейчас его страхи не могут не вызвать смеха: сделанное Гауссом для обоснования неэвклидовой геометрии так ничтожно, что «криков беотийцев» .и «ос» можно было бы и не опасаться.

Научная добросовестность все же не позволяла ему зачеркивать то, что сделано другими в этом направлении. В одном из писем он даже называет Яноша Больяй «гением первого ранга». Но оказать поддержку молодому ученому, назвать его. «гением первого ранга» публично не хочет. Ведь Больяй лишь повторил то, о чем думал сам «король» еще тридцать лет назад. Тут, разумеется, содержится большая доля неправды. Гаусс часто размышлял о теории параллельных линий — и только. Систематического изложения своих взглядов он не дал.

Получив ответ Гаусса, Янош Больяй пришел в бешенство. Он вообразил, что «жадный колосс Гаусс» хочет присвоить открытие себе; не мог поверить, что «принцепс математикорум» охватил своим умом и эту, казалось бы, неизведанную область. Как жаль, что «королей» на дуэль вызывать не принято!

В жизни Больяй начался самый мучительный период. Он близок был к сумасшествию.

Гаусс справедливо полагал, что на «Аппендикс», содержащийся как приложение к увесистому тому сочинений Фаркаша Больяя, никто не обратит внимания. Он был убежден, что время для идей неэвклидовой геометрии еще не наступило. Все забудется. Затеряется на пыльных полках библиотек и «Аппендикс». Во всяком случае, ему, Гауссу, до всего этого нет никакого дела,

… «Король математики» буквально потерял дар речи, когда обнаружил у себя на столе изящную книжицу, заглавие которой сразу же бросалось в глаза: «Геометрические исследования по теории параллельных линий Николая Лобачевского».

Заинтригованный Гаусс взглянул на первую страницу и сразу же забыл обо всем на свете. Он испытывал радость открытия. Какая ясность мысли! Какой сверкающий ум! Нет, ничего подобного никогда не приходило в голову «королю математиков»!

Охваченный восторгом, он перечитывает книжку несколько раз и, забыв о «беотийцах» и «осах», делится счастьем со старым другом Шумахером, директором обсерватории в Копенгагене: «Недавно я имел случай вновь просмотреть книжку Лобачевского («Геометрические исследования по теории параллельных», Берлин, 1840, в издательстве Г. Финке, размером в четыре печатных листа). Она содержит основы той геометрии, которая должна была бы иметь место и была бы строго последовательной, если бы эвклидова геометрия не была истинной. Некто Швейкарт назвал такую геометрию звездной, Лобачевский называет ее воображаемой геометрией. Вы знаете, что я уже пятьдесят четыре года (с 1792 года) имею то же убеждение (с некоторым позднейшим расширением, на котором не хочу здесь останавливаться); по материалу я таким образом в сочинении Лобачевского не нашел для себя ничего нового; но в его развитии автор следует другому пути, отличному от того, которым я шел сам; оно выполнено Лобачевским с мастерством, в чисто геометрическом духе. Я считаю себя обязанным обратить Ваше внимание на эту книгу, которая наверное доставит Вам совершенно исключительное наслаждение».

Совершенно исключительное наслаждение... Его испытал сам «принцепс математикорум». Прежде всего поражала смелость Лобачевского. Вот так прямо, черным по белому изложить то, что Гаусс берег, как сокровенную тайну! Железная логика, величайший ум, перед которым даже он, Гаусс, испытывает робость.

Книжка Лобачевского произвела на Гаусса такое могучее впечатление, что он под ее влиянием даже изменил весь уклад своей жизни. Он больше не отшельник! К черту вычисления! Ко всем чертям башню!.. Родилась новая геометрия. Ее создал другой. Но что из того? Она родилась!

…Он буквально понуждает своих друзей заняться изучением трудов Лобачевского, пишет пространные письма, не жалея ни времени, ни бумаги. Он возмущен пасквильными рецензиями на труды Лобачевского, помещенными в «Сыне отечества» и в справочнике Герсдорфа.

«...Очень обидная критика этого труда находится в № 41 другого русского, по моему предположению, выходящего в Петербурге журнала «Сын отечества», от 1834 года, которой Лобачевский противопоставил антикритику и которая, однако, не была набрана до начала 1835 года.

… [Однако] Гаусс не хочет брать на себя никаких обязательств. Он слишком стар, чтобы выступать в печати с поддержкой чужого учения, не желает ввязываться в полемику. А то, что полемика будет, он не сомневается. Он наслаждается творениями русского гения, как скупой рыцарь, и не хочет, чтобы «крики беотийцев» омрачали радость. А может быть, он просто не понимает, как нуждается в его поддержке Лобачевский… Если «принцепс математикорум» не торопится вступать в перебранку с «беотийцами», то он делает все возможное, чтобы распространить труды Лобачевского среди своих друзей. Когда в Геттингене появляется молодой венгерский математик Ментович, Гаусс сразу же вспоминает Яноша Больяй. Вот кого следует порадовать! Он ведь тоже работает над теорией параллельных.

17 октября 1848 года Янош Больяй получил «Геометрические исследования» Лобачевского. Это был удар ножом в сердце. Конечно же, Больяй не поверил в существование какого-то Лобачевского; он решил, что сам «геттингенский колосс», опасаясь скандала, скрылся под псевдонимом. Гаусс обокрал Яноша Больяй! Жадный старик не мог смириться с темг что кто-то другой станет родоначальником новой геометрии.

— Гаусс сам обработал теорию и выпустил в свет под именем Лобачевского! — воскликнул Больяй.

Однако вскоре он убедился, что Лобачевский— лицо не вымышленное, а вполне реальное. Значит, где-то в Казани живет великий геометр. Больяй пытается вникнуть в каждое слово. «Геометрических исследований». Он не может не восхищаться ходом мысли своего соперника, называет его выводы гениальными.

Военную службу Янош давно бросил. С отцом рассорился. Дело дошло до того, что он вызвал старого Фаркаша на дуэль. К счастью, дуэль не состоялась. С каждым годом Янош все больше впадал в тяжелую меланхолию. Он был болен. Нервное потрясение не могло пройти бесследно.

Больяй ставит перед собой задачу превзойти Лобачевского и Гаусса. *Он* еще покажет миру!.. Он вызывает этих колоссов на своеобразную дуэль разума. Еще неизвестно, чем закончится поединок. Скорее всего поражением и Лобачевского и Гаусса. Ведь еще не было такой дуэли, когда бы Янош Больяй не выходил победителем! Дни заполнены лихорадочными поисками, вычислениями. Безумным взором смотрит он на брошюру казанского математика. Превзойти!.. Он ведь не знает, что Лобачевским созданы капитальные труды, законченная теория. Дуэлянт искусно владеет шпагами и пистолетами, но...

Запутавшись в вычислениях, он вдруг приходит к выводу, что неэвклидовой геометрии быть не может. Есть одна, незыблемая — эвклидова! Он доказал пятый постулат Эвклида!

Он берет лист бумаги, выводит крупными буквами: «Доказательство XI эвклидовой аксиомы (пятого постулата), которая до сих пор на земле оставалась сомнительной, действительно в высшей степени важное, так как она служит основанием всего учения о пространстве и движении».

Но дальше заглавия не пошло. Опять вкралась ошибка в вычислениях!

В своем стремлении превзойти Лобачевского он бросается из одной крайности в другую. Он берется за решение неразрешимых задач и терпит неудачи.

Постепенно он приходит к мысли, что нужно создать науку наук — учение о всеобщем благе. Он хочет осчастливить весь род человеческий, построить государственную систему на математической основе.

Это уже была агония разума, сломленного неудачами.

А Лобачевский так никогда и не узнает, что в Венгрии живет страдалец, его единомышленник Янош Больяй. Не узнает и того, что в веках их имена будут стоять рядом.

4. Гаусс, Лобачевский и Риман

Гаусс думал о Лобачевском до последнего дня. «Принцепс математикорум» верил в свою гениальность и знал, что после его смерти вся его личная переписка будет опубликована. Так уж повелось испокон веков. Он ценил иронию и заранее предвкушал удовольствие от мысли, что «беотийцы», узнав из писем о взглядах Гаусса на неэвклидову геометрию, поднимут шум; это будет его посмертная месть. Потому-то и пропагандирует взгляды казанского геометра при каждом удобном случае. «Беотийцы» всегда портили жизнь Гауссу. Каждый из них считал своим долгом совать нос в его дела, давать советы, учить, «подправлять», ограждать от ереси. Самому себе он всегда казался Гулливером, спутанным по рукам и ногам.

Еще до знакомства с работами Лобачевского он догадывался, что, помимо эвклидовой, может иметь место иная геометрия и что природа пространства, возможно, совсем не такова, как мы привыкли считать.

Он имел неосторожность высказать «крамольные» мысли вслух. Больше того: он дерзнул на практике проверить положение о том, что сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым. Он вымерил треугольник, образованный вершинами гор Брокен, Хохер Хаген и Инзельсберг. Отклонений от эвклидовой геометрии, разумеется, не обнаружил.

Но «беотийцы» словно с ума посходили. Казенные философы, попы, пигмеи научной мысли, математические крохоборы освистали Гаусса. Они объявили, что математика — это наука, в которой никогда не знают, о чем говорят, и не знают, истинно ли то, о чем говорят; и всякий не придерживающийся подобного взгляда на математику не может считаться настоящим ученым. Они, едва познавшие азы науки, читали ему мораль, говорили, что «чувственной» реальности не место в математике. Наука должна обладать чистой красотой и в этом ее эстетическая ценность; и что если бы Гаусс даже и нашел отклонение от эвклидовой геометрии, то это в лучшем случае могло бы значить, что существуют какие-то неизвестные нам причины, отклоняющие световые лучи между двумя зрительными трубами; природа пространства может быть лишь эвклидовой. Недаром Кант обожествил эвклидову геометрию, признал ее положения истинными априори.

С тех пор «колосс» решил не связываться больше с «беотийцами».

Да, на неэвклидову геометрию Гауссу не повезло с самого начала. Тогда он решил создать дифференциальную геометрию — внутреннюю геометрию кривых поверхностей.

, Любая поверхность несет в себе свою собственную геометрию; однако эта геометрия никоим образом не определяет несущую ее поверхность: при помощи изгибания можно получить бесконечно много поверхностей, разных по форме, но с общей внутренней геометрией. Например, листу бумаги легко придать цилиндрическую форму. Так же легко развернуть цилиндр на плоскость. Сумма углов треугольника на плоскости и на поверхности цилиндра всегда одинакова. Таким образом, мы наглядно доказываем, что кусок плоскости и некоторая часть цилиндра имеют одинаковую внутреннюю геометрию. Наложить лист на глобус или на седловидную поверхность нам не удастся: в первом случае образуются складки, во втором — разрывы. Следовательно, у плоскости, сферы и гиперболического параболоида разные внутренние геометрии. Само собой разумеется, что кривизна плоскости равна нулю (на то она и плоскость!) г кривизна сферы определяется радиусом, ее принято называть положительной (хотя бы потому, что сумма углов треугольника на поверхности сферы всегда больше 180°); существуют поверхности, где сумма углов треугольника меньше двух прямых — их называют поверхйостями отрицательной кривизны; сюда можно отнести гиперболический параболоид или седло.

Одним словом, каждая поверхность имеет свою геометрию.

В повседневной практике о свойствах той или иной поверхности мы судим с точки зрения жителя трехмерного пространства. Мы говорим: шар, плоскость. Но, оказывается, можно также отыскивать внутренние свойства самой поверхности безотносительно к ее внешнему положению, так сказать, не выходя за ее пределы. Произведем маленький мысленный эксперимент. Поверхность есть не что иное, как пространство двух измерений. Пусть на поверхности шара обитают некие двумерные существа, не имеющие никакого представления о третьем измерении. Поверхность сферы будет их пространством, их «плоскостью»; измеряя треугольники на своей «плоскости», они каждый раз убеждаются в том, что сумма внутренних углов треугольника больше 180°. Это незыблемый закон их пространства. Им и в голову не придет, что могут существовать другие поверхности — такие, скажем, как стол, седло. На поверхности шара нет прямых линий, но гипотетические двумерные существа упрямо будут считать свои кривые прямыми, так как в их мире это кратчайшие линии, геодезические, как их принято называть. Всякого дерзнувшего утверждать, что их «пространство» искривлено и представляет поверхность сферы, они сочтут безумцем. Им никогда не выйти из двумерности своего мира.

Как видим, понятие кривизны поверхности, пока мы не выходим за ее пределы, не является чем-то наглядным. Мы могли бы продолжить эксперимент: населить двумерными существами плоскость. Можно . ли дать обитателям плоскости представление о кривизне? Да, можно. Пусть плоская поверхность в одной области доступного им пространства по каким-то причинам деформировалась, вспучилась, сделалась сферической. Обитатели плоскости обнаружат, что, в этой области сумма углов треугольника больше 180°. По отклонениям суммы углов треугольника от '-1 двух прямых они и будут судить о кривизне, о мере «неэвклидовости» .своего пространства, вкладывая в понятие кривизны лишь метрические соотношения — и ничего более.

По замечанию Гельмгольца, Гаусс установил геометрию поверхности в том виде, в каком ее строил бы обитатель этой поверхности, которому недоступно. третье измерение пространства.

Гаусс не производил мысленных опытов. Создавая геометрию кривых поверхностей, он имел в виду лишь свои многолетние геодезические измерения и не отождествлял поверхность с пространством.

Все последние годы он проводил в своей башне и ничего не хотел знать о своих учениках. А они настойчиво стучались в дверь, несли скороспелые мемуары, требовали внимания.

Зимой 1847 года «король математики», наконец, вышел из себя.

В святая святых, в башню Гаусса ворвался студент Геттингенского университета, некто Бернгард Риман. Сын бедного провинциального священника, Риман, не желая изучать теологию (к чему побуждал его отец), бежал в Геттинген. Конечно же, в кармане у него лежал совершенно гениальный доморощенный мемуар «Опыт обобщения действий интегрирования и дифференцирования». Риман осознавал свое исключительное математическое дарование, мечтал завоевать мир, а потому сразу же сунулся к «колоссу».

Гаусс с недоумением разглядывал смельчака: впалая грудь, впалые щеки, реденькие волосы на голове, близорукие глаза. Все время щурится. А тот, кто имеет привычку щуриться, быстро теряет зрение.

— Я Бернгард Риман, — представился юноша таким тоном, словно кому-кому, а «королю математики» следовало бы уж давно знать это звучное имя. — Я проштудировал ваши «Общие изыскания о кривых поверхностях» и был поражен глубиной мысли... Превосходная работа!

— А я и не подозревал, — ответил Гаусс сухо.— Мне лестно слышать ваш отзыв, господин... м... м...

— Риман!

— Вот именно. А теперь перейдем к делу. Вы принесли на отзыв свой мемуар, не так ли?

Риман смутился.

— В некотором роде да.

— Молодой человек! — сказал «колосс» резко. — Вам двадцать лет, а мне семьдесят. Я не хочу обкрадывать вас, но и вы не должны...

Риман понял. Он побелел, сжал зубы. Повернулся и ушел. Наутро он оставил Геттингенский университет, уехал в Берлин. Гаусс оттолкнул еще одного гения, который мог бы стать самым преданным его учеником. В Берлине Риман обратил на себя внимание выдающегося математика Дирихле, позднее свел знакомство с Гельмгольцем.

Риман был своеобычным молодым человеком. Его интересовало буквально все. Так, в письме брату Вильгельму, почтмейстеру в Бремене, он сообщает: «Я снова взялся за исследования по связи между электричеством, гальванизмом, светом и тяготением и продвинулся настолько, что смогу, безусловно, опубликовать их в нынешней редакции. Между прочим, я имею подтверждение сведений, что уже много лет Гаусс занимается теми же вопросами и теперь сообщил об этом нескольким друзьям, в том числе Вебе-ру, однако с обязательством сохранения тайны. Надеюсь, что еще не поздно и что можно будет установить, что все это найдено мною независимо от Гаусса. Пишу тебе без опасения, что ты бросишь мне упрек в неуместной заносчивости».

Молодой, увлекающийся, впечатлительный и разносторонний, Риман занимался вопросами топологии, теории функций, математической физикой, газовой динамикой, психологией, написал «Новые математические принципы натурфилософии», в которых предвосхитил теорию Максвелла; под влиянием Гельмгольца составил работу о механизме уха и глаза. Он был поэтом, хотя и не писал стихов: ему хотелось Считать, что небесные тела, в том числе и Земля, одушевлены. Он мечтал получить кафедру в Берлинском университете и начать деятельность большого размаха, стать главой школы в области интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных и математической физики. Он чувствовал' избыток сил, грандиозные планы переполняли его. Он замыслил построить вполне законченную математическую теорию, которая, исходя из элементарных законов взаимодействия отдельных точек, охватила бы все процессы, происходящие в окружающем нас физическом непрерывном пространстве, независимо от того, идет ли речь о тяготении, электричестве, магнетизме или равновесии тепла.

Прошло много лет, и вот Риман вновь в Геттинге-не. Он успешно защитил докторскую диссертацию, где содержалась целая программа научных исследований в области аналитических функций, указывающая один из путей развития этой теории на целое столетие.

Но Гаусс верен себе: он слышать не желает о «самоучке». Какое дело семидесятисемилетнему Гауссу до Римана? Говорят, этот Риман тяжело болен, харкает кровью. Что из того?

И все же иметь дело с Риманрм Гаусс вынужден. Риману по существующим правилам следует вступить в профессорскую общину. А для этого он должен прочитать перед факультетом пробную лекцию. Тему утверждает Гаусс. Они снова встречаются. Риман от-лустил усы и бороду. В свои двадцать семь лет он выглядит весьма солидно. Никаких воспоминаний. Холодная вежливость. Подобная сдержанность импонирует Гауссу. Риман представил три темы. Гаусс рекомендует взять самую сложную: «О гипотезах, лежащих в основания геометрии». -Ему интересно знать, как выпутается из всего этого «бородатый мальчишка-самоучка».

— Вы знакомы с мемуаром Лобачевского «Геометрические исследования»? Предложение казанского геометра я считаю одной из гипотез, лежащих в основании геометрии.

Да, Риман знаком с работами Лобачевского, восхищен ими, хотя и не понимает, почему русский математик так^легко отбросил «теорию тупого угла». Изыскания самого Гаусса и Лобачевского и побудили Римана включить в список тему «О гипотезах». Он много размышлял о так называемых «многократно протяженных многообразиях», а также о «теории тупого угла» Саккери и Ламберта. Неэвклидовых геометрий может'быть несколько.

Гаусс заинтригован.

— Да, да, я обязательно приду на .вашу лекцию, господин Риман. А мемуар Лобачевского все-таки возьмите, проштудируйте еще раз.

— Весьма признателен, господин тайный советник. Каков тон! «Многократно протяженные многообразия»... Что бы это могло значить?

10 июня 1854 года в заседании философского факультета Геттингенского университета Риман прочитал вводную лекцию «О гипотезах, лежащих в основании геометрии».

Все, что он говорил, лежало на грани здравого смысла. Во всяком случае, профессора ничего не поняли. Многие из них, не будучи математиками, не восприняли то, что уже давно витало в воздухе, ожидая кристаллизации. Это была идея многомерной геометрии.

Риман глубоко усвоил достижения Лобачевского и Гаусса и пошел дальше.

Например, Риман выдвинул свой постулат: через точку, взятую вне прямой, нельзя провести ни одной параллельной линии к данной прямой! И создал свою геометрию.

В этой геометрии параллельных линий нет совсем, а сумма внугренних углов треугольника больше двух прямых; различные перпендикуляры к прямой не параллельны (как в эвклидовой геометрии) и не расходятся (как в геометрии Лобачевского), а пересекаются; все прямые — замкнутые линии. То, что в такой геометрии нарушаются и другие аксиомы Эвклида, а не только один пятый постулат, мало смущало Ри-мана. А почему бы новой геометрии не иметь свои собственные аксиомы, отличные от эвклидовых?

Замкнутость прямой влечет за собой признание замкнутости, конечности плоскости, поверхности или пространства. На какой же поверхности реализуется эта диковинная геометрия? Оказывается, планиметрия Римана может быть истолкована при помощи Обыкновенной геометрии на поверхности сферы.

Спрашивается: зачем было городить огород и открывать то, что давным-давно открыто Гауссом и другими? Ведь Гаусс уже создал геометрию кривых поверхностей, в том числе и сферы.

Но все дело в том, что Гаусс стремился понять законы внутренней геометрии той или иной поверхности, а Римана волновала загадка пространства. Он вслед за Лобачевским показал, что метрика пространства зависит от характера действующих сил. Эллиптическая геометрия может осуществляться не только на поверхности сферы, но и в трехмерном пространстве.

Что такое пространство? Почему пространство Лобачевского и пространство Римана отличается от эвклидова пространства? Что означает, к примеру, отклонение суммы внутренних углов треугольника от 180°? При измерении поверхностей оно означало меру кривизны той или иной поверхности. Но может ли быть искривлено пространство? Как это наглядно можно было бы себе представить?

Пространство, физическое трехмерное пространство искривлено, и лишь в бесконечно малых областях его можно считать плоским, неискривленным, эвклидовым! — вот к такому выводу приходит Риман. Мерой отличия любого пространства от эвклидова является кривизна.

Уже Лобачевский близко подошел к мысли о кривизне пространства. Он вопреки Ньютону считал, что в мире пустоты не существует; все тела в природе можно представлять частями одного целого — пространства. Пространство есть протяженность, присущая всем телам, кроме того, оно обладает структурой. Соприкосновение тел как форма их взаимодействия образует основу пространственных отношений. Может ли материальная протяженность быть искривленной? По-видимому, да. Как уже отмечалось, понятие кривизны поверхности' — этого двумерного пространства, если мы не выходим за ее пределы, не является наглядным. Также не является наглядным и понятие кривизны трехмерного пространства. А выйти за его пределы мы не в состоянии, так как в природе не существует четвертого геометрического измерения. Во всяком случае, три измерения выражают всю полноту связи сосуществующих явлений.

Эвклидово пространство можно считать плоским, обладающим нулевой кривизной; пространство Лобачевского имеет отрицательную кривизну, Римана — положительную.

— Какова же истинная геометрия физического пространства? Это можно установить только опытным путем, — повторяет Риман вслед за Лобачевским. . ,

Геометрия реального мира есть вопрос физический.

Человечество могло поздравить себя: оно стало обладателем трех геометрий — плоской эвклидовой, гиперболической Лобачевского и эллиптической Римана! Три пространства со своей внутренней геометрией. Это в полном смысле трехмерные физические пространства, и в каждом существуют свои типы поверхностей: в эвклидовом — поверхность шара, плоскость; в пространстве Лобачевского — плоскость, на которой осуществляется гиперболическая геометрия, поверхность шара и некая предельная поверхность, несущая на себе планиметрию Эвклида. Есть свои поверхности и у риманова пространства.

Но Риману всего этого показалось мало: он решил создать еще одну геометрию — общую, которая включала бы в себя все мыслимые геометрии, причем наиболее простые из них — три нам уже известные. Оказывается, геометрий может быть бесчисленное множество. Стоило Лобачевскому сдвинуть многовековой обомшелый камень, как геометрии посыпались, словно из рога изобилия.

Риман стал творцом геометрии множеств. Что такое множество или многообразие? Это совокупность чего-либо, коллектив вещей, понятий, идей, числовые группы. Всякая поверхность, например, не что иное, как двумерное множество, так как каждый элемент, точка определяется здесь двумя координатами; физическое пространство — трехмерное множество — оно имеет три измерения; совокупность всех окружностей на плоскости — тоже трехмерное множество: каждый ее элемент — окружность — определяется координатами центра и радиусом.

Множество может состоять, и не из геометрических элементов: рой несущихся в пространстве, и времени материальных частиц — четырехмерное множество. Можно строить геометрию кругов, шаров, множества цветов, звуков, роя частиц и т. д. Нужно только найти для каждого множества свое мероопределение.. То есть геометрия свойственна ме только реальному пространству, а любому множеству; ее следует рассматривать не как абсолютно точную геометрию реального пространства, а как приближение, модель форм и отношений этого пространства. Риман приходит к понятию кривизны многообразия. Всякое многообразие имеет свою кривизну. Одна и та же геометрия может иметь несколько истолкований, если она находит свое осуществление на нескольких различных множествах.

В понятие многомерности «римановых пространств» не следует вкладывать ничего мистического: ведь это всего-навсего «идеальные» математические «пространства». Совокупность звуков является двумерным многообразием лишь потому, что они отличаются амплитудой и частотой колебаний; в кинетической теории газов применяют пространство 36-Ю^{23} измерений. Риман расщепил пространство на его малые элементы и показал, как из упрощенной метрики элемента, точки разворачивается метрика всего физического пространства.

Пространства Эвклида, Лобачевского, эллиптическое Римана имеют постоянную кривизну; общая гео-уетрия Римана не может обладать постоянной кривизной.

Как видим, Риман мыслил весьма непрямолинейно. Он довершил дело, начатое Лобачевским. Остальным математикам осталось лишь отыскивать все новые и новые множества. Из идей Лобачевского и Римана впоследствии родился четырехмерный мир теории относительности.

Всю эту ученую тарабарщину Гаусс слушал, расплываясь в блаженной улыбке. Наконец-то нашелся достойный ученик, преемник! Предел изощренности. Тут уж все кривое: даже цвета и звуки. А Гаусс обожал кривизну, особенно в математике. Кривизна многообразия... Уплотненность математической мысли Римана поразила «геттингенекого колосса», и он из недоброжелателя превратился в поклонника и покровителя крепнущего гения.

Выступать в печати с защитой идей Римана Гаусс все же не стал. Да и не успел: он умер через несколько месяцев. №а его рабочем столе нашли два экземпляра «Геометрических исследований» Лобачевского.

Не понятый современниками (ведь человечество — тоже многообразие со своей кривизной в мышлении!), тяжелобольной, Риман забросил свой мемуар, находя его недостаточно обработанным. Мемуар нашли в куче бумаг только после смерти ученого. Скончался он в Италии, на сороковом году жизни. Вся его научная деятельность длилась немногим более пятнадцати лет.

Лобачевский никогда не слышал имени Римана; но такова уж геометрия непрерывного многообразия гениальности — в истории науки им стоять рядом.

На русском языке мемуар «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» появился в 1893 году в сборнике, изданном Казанским физико-математическим обществом в связи со столетним юбилеем Лобачевского.

5. Заключение

…Когда назревает необходимость в подобных «коренных» идеях, они, как правило, почти одновременно возникают в совершенно разных местах земного шара.

Так случилось и с неэвклидовой геометрией. Пространственно-временные представления Ньютона постепенно перестали удовлетворять пытливую, тонкую человеческую мысль. Правда, переворот в воззрениях еще только созревал. Практика пока еще довольствовалась ньютоновской концепцией. Но наиболее чуткие умы уже догадывались, что кризис близок.

Лобачевский мечтал хотя бы об одном-единственном человеке, который понял бы и оценил по достоинству его геометрию. Но их в мире, во всем человечестве, было двое — кроме самого Лобачевского — венгр Янош Больяй и Гаусс...

… Не следует думать, что те профессора, которым он растолковывал в течение десятков лет основы своей геометрии, не понимали его. Они, разумеется, понимали все и внешне даже признавали идеи Лобачевского. Но внутренне они не были в состоянии проникнуться этими идеями. Они не могли уяснить, зачем нужна новая геометрия. Они не обладали неким инстинктом предвидения, как Лобачевский. Будущие столетия стучали в виски Лобачевского, он один осознавал свое назначение на земле. А люди, окружавшие его, считали, что гений может явиться где угодно, но только не в Казани.

Николай Иванович Лобачевский не дожил всего лишь нескольких лет до своей славы. После кончины Гаусса были опубликованы его дневники и переписка с Шумахером. Содержание писем, в которых дается оценка трудам казанского геометра, нам уже известно. Восторженные отзывы «геттингенского колосса» о работах Лобачевского взбудоражили математиков всего мира. Гауссу привыкли верить. О Лобачевском заговорили, кинулись разыскивать его сочинения. Полетели запросы в Казань. В Казани всполошились. Перерыли всю библиотеку, но нашли только один экземпляр «Воображаемой Геометрии», да и то неполный. А требования из-за границы становились все настойчивей. Подайте труды гениального математика! Тогда-то и удалось Мариану Ковальскому добиться издания полного собрания геометрических сочинений Лобачевского.

Кто же способствовал возрождению идей Лобачевского?

В Германии это были профессор гимназии Бальт-цер, естествоиспытатель Гельмгольц; во Франции — профессор университета в Бордо Гуэль; в Италии — Баттальини, Дженокки; в Америке — ученый Гальстед; в Англии — Клиффорд; в Бельгии — Тилли; в России — профессора А. А. Летников, П. И. Котельников, Э. А. Кнорре, Ф. М. Суворов.

За первыми пропагандистами необычайного учения двинулась целая армия ученых.

Но триумфальное шествие учения Лобачевского началось после того, как итальянский математик Евгений Бельтрами показал, что внутренняя геометрия на псевдосфере совпадает с геометрией на куске$_3$ плоскости Лобачевского. В обычном эвклидовом пространстве был найден реальный, наглядный двумерный геометрический образ, обладающий указанными Лобачевским свойствами.

… Началась новая эра в развитии естествознания.

К столетию со дня рождения Лобачевского его имя сделалось известным во всех уголках земного шара. Юбилей в Казани в 1893 году вылился в торжество науки. В комитет по сбору капитала имени Лобачевского вошли почетными членами ученые с мировой славой: Гельмгольц, Бельтрами, Пуанкаре, Клейн, Софус Ли, Сильвестр, Кэли, Эрмит и многие другие. Казанским физико-математическим об-ществом была учреждена премия Н. И. Лобачевского, великому геометру поставили памятник перед зданием университета.

… Космологических моделей вселенной существует великое множество. Каждая из них претендует на объяснение мира в целом. Есть модели конечной вселенной, разбегающейся вселенной, иерархически построенной вселенной, статической, динамической. Но после Лобачевского во всех этих моделях вынуждены признавать полную зависимость геометрического от физического. Так, геометрические свойства пространства в теории относительности ставятся в. зависимость от структуры полей тяготения. Геометрия мирового пространства носит неэвклидов характер: оно искривлено. Любопытно, что даже близ земной поверхности геометрия пространства является неэвклидовой, хотя отклонения незначительны. «Искривление» пространства вблизи тяжелых материальных тел воспринимается нами как поле тяготения.

…